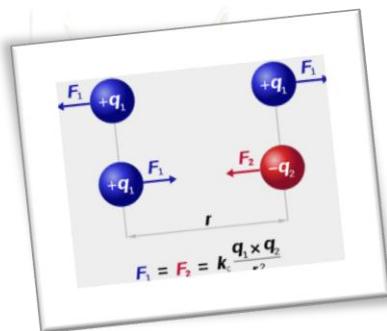
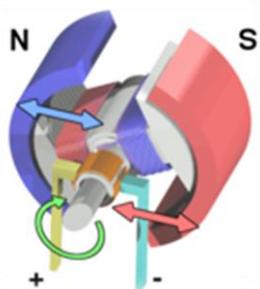
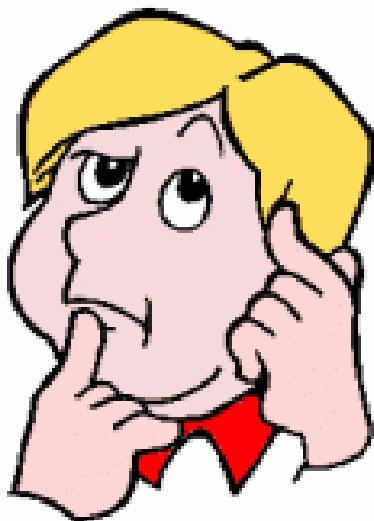
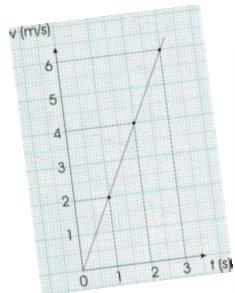
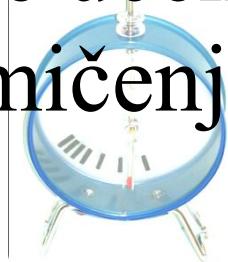




Katalog za pripremanje učenika osnovnih škola za takmičenja iz fizike



Tuzla, 2017.

Katalog za pripremanje učenika osnovnih škola za takmičenja iz fizike

Priredivač kataloga: Društvo fizičara Tuzlanskog kantona u saradnji sa Pedagoškim zavodom Tuzlanskog kantona Tuzla

<http://df-tk.com.ba>

e – mail: df-tk@df-tk.com.ba i drustvo.fizicaratk@gmail.com

Odabir, izrada i priređivanje zadataka: Edin Kušmić, Mirsudin Pačariz, mr. sci. Zineta Dedić, Ervin Baraković, Sead Ahmetspahić, Aldin Sumbić

Recenzenti: Denis Suljendić, prof. i mr.sci. Zineta Dedić, prof.

Tehnički urednici: Edin Kušmić i Sead Ahmetspahić

Ovaj Katalog nije za prodaju.

Uvodna riječ priređivača Kataloga

Dragi učenici i učenice, poštovane kolegice i kolege nastavnici,

ideja za realizaciju ovog Kataloga za pripremanje učenika osnovne škole za takmičenja iz fizike tinjala je već duže vrijeme i bila predmetom razgovora u jednom krugu nastavnika i profesora fizike na raznim aktivima, takmičenjima i seminarima iz fizike organiziranim od strane Pedagoškog zavoda Tuzla i Ministarstva obrazovanja, nauke, kulture i sporta Tuzlanskog kantona, kao i Društva fizičara u Tuzlanskom kantonu. No, od ideje do realizacije, uz planiranje, konsultacije i razne dogovore proteklo je poprilično vremena.

Iako je na našem tržištu prisutno mnogo kvalitetnih zbirki zadataka iz fizike za učenike osnovnih škola, potreba za jednom ovakvom publikacijom, a koja će u elektronskoj formi biti besplatno dostupna svakom učeniku i nastavniku, pokazala se neophodnom iz više razloga. Ovim Katalogom smo u prvom redu htjeli objediniti one specifične i karakteristične zadatke, kakvi su se posljednjih godina pojavljivali na općinskim, kantonalnim, te dijelom i federalnim takmičenjima učenika osnovnih škola, a koji su zastupljeni na dodatnoj nastavi iz fizike i veoma malo ili čak nikako na redovnoj nastavi. Neke od tih zadataka („Zadaci za vježbu“) smo detaljno razradili, pružajući tako mogućnost učenicima da principe na kojima se bazira njihovo rješavajne u velikoj mjeri mogu sami razumjeti i vježbati ne oslanjajući se mnogo na pomoć nastavnika. Za jedan dio zadataka („Zadaci za samostalan rad“) dati su samo rezultati ili kratke upute kako ih rješavati. Konačno, smatramo da će okolnost da je ova zbirka dostupna svima, znatno olakšati i nastavnicima i učenicima pripremanje za takmičenja, što bi trebalo rezultirati boljom pripremljenošću učenika za različite nivoe takmičenja iz fizike (barem općinski i kantonalni nivo).

Katalog sadrži zadatke iz skoro svih nastavnih oblasti fizike koji se izučavaju u osnovnoj školi (izuzetak su atomska i nuklearna fizika), a oblasti su poredane onim redoslijedom kako se i izučavaju na redovnim časovima fizike. Iako je prvenstveni cilj bio da Katalog posluži za pripremanje učenika osmog i devetog razreda za takmičenja, mogu ga koristiti i učenici sedmog razreda kao i svi drugi „fizički radoznalci“. Nadamo se da će neki od zadataka naći svoje mjesto, kako na testovima i pismenim zadacima na redovnim časovima, tako i na školskim, općinskim i kantonalnim takmičenjima osnovaca.

Priredivači Kataloga nisu autori svih zadataka. Za izvjestan broj zadataka korištene su zbirke zadataka i udžbenici za osnovne i srednje škole, koji su već dugo u upotrebi na našem kantonu, kao i zadaci sa takmičenja, kako iz naše zemlje, tako i iz zemalja u okruženju. Spisak korištene literature i web stranica dat je na kraju Kataloga. Upotrebom Kataloga ne želimo dase odustane od korištenja drugih zbirki zadataka i ostalih sadržaja iz fizike, već da se njegovim korištenjem stečeno znanje upotpuni i poboljša sposobnost učenika u rješavanju računskih zadataka.

Objavljivanje ovog Kataloga na web stranici Društva fizičara TK i Pedagoškog zavoda TK ne vidimo kao čin njegovog završavanja, već se nadamo „dugom životu“ Kataloga protkanog stalnim dopunjavanjem i usavršavanjem.

Nadamo se da će ovaj materijal potaknuti sve one koji vole fiziku, kako nastavnike tako i učenike, da daju svoj doprinos da u budućnosti on nosi epitet dobre, potrebne, zanimljive i iskoristene „stvari“.

Svesni činjenice da su pogreške uvijek moguće (kao npr. pri mjerenu i računanju), sve uočene: štamparske, računske i druge greške, možete elektronskim putem prijaviti priređivačima na e-mail Društva fizičara TK.

Sadržaj

Uvodna riječ priređivača Kataloga	3
1. Mjerenja u fizici. Greške pri mjerenu	6
Pregled najvažnijih formula.....	6
Pisanje brojeva pomoću potencije broja 10	6
Zadaci za vježbu	8
Zadaci za samostalan rad	13
2. Međudjelovanje. Sila	14
Pregled najvažnijih formula.....	14
Zadaci za vježbu	14
Zadaci za samostalan rad	16
3. Osnove kinematike.....	18
Pregled najvažnijih formula.....	18
Zadaci za vježbu	19
Zadaci za samostalan rad	28
2. Osnove dinamike	32
Pregled najvažnijih formula.....	32
Zadaci za vježbu:	33
<i>Primjena 2. Njutnovog zakona</i>	33
<i>Primjena zakona o održanju količine kretanja</i>	38
<i>Njutnov zakon opće gravitacije</i>	40
<i>Slobodan pad, hitac uvis i naniže</i>	41
<i>Trenje klizanja, sila otpora sredine</i>	45
Pregled najvažnijih formula.....	45
Zadaci za vježbu	46
Zadaci za samostalan rad	48
3. Pritisak	52
Pregled najvažnijih formula.....	52
Zadaci za vježbu	52
Zadaci za samostalan rad	57
4. Rad, energija, snaga. Prosti mehanizmi	60
Pregled najvažnijih formula.....	60

Zadaci za vježbu	63
Zadaci za samostalan rad	79
5. Toplotne pojave	83
Pregled najvažnijih formula.....	83
Zadaci za vježbu	84
Zadaci za samostalan rad	89
6. Elektrostatika	91
Pregled najvažnijih formula.....	91
Zadaci za vježbu	96
Zadaci za samostalan rad	111
7. Istosmjerna struja stalne jačine	115
Pregled najvažnijih formula.....	115
Zadaci za vježbu	118
Zadaci za samostalan rad	131
8. Magnetno polje	135
Pregled najvažnijih formula.....	135
Zadaci za vježbu	137
Zadaci za samostalan rad	142
9. Oscilacije, talasi, zvuk	145
Pregled najvažnijih formula.....	145
Zadaci za vježbu	147
Zadaci za samostalan rad	150
10. Optika.....	152
Pregled najvažnijih formula.....	152
Zadaci za vježbu	157
Zadaci za samostalan rad	164
Mješoviti zadaci	168
Dodaci	176
Korištena literatura i web stranice	182

1. Mjerenja u fizici. Greške pri mjerenu

Pregled najvažnijih formula

Srednja vrijednost izmjerene veličine:

$$x_{sr} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Apsolutne greške pojedinih mjerena:

$$\begin{aligned}\Delta x_1 &= |x_{sr} - x_1| \\ \Delta x_2 &= |x_{sr} - x_2| \\ &\dots \\ \Delta x_n &= |x_{sr} - x_n|\end{aligned}$$

Srednja absolutna greška:

$$\Delta x_{sr} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n}{n}$$

Rezultat mjerena zapisujemo na sljedeći način:

$$x = x_{sr} \pm \Delta x_{sr}$$

Relativna greška:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x_{sr}}{x_{sr}} \cdot 100\%$$

Pisanje brojeva pomoću potencije broja 10

Potencije broja 10 sa pozitivnim eksponentom:

$$\begin{aligned}10^1 &= 10 \\ 10^2 &= 10 \cdot 10 = 100 \\ 10^3 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000 \\ 10^4 &= 10\,000 \\ 10^5 &= 100\,000, \text{ itd.}\end{aligned}$$

Potencije broja 10 sa negativnim eksponentom:

$$\begin{aligned}10^{-1} &= \frac{1}{10} = 0,1 \\ 10^{-2} &= \frac{1}{100} = 0,01 \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001\end{aligned}$$



$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0,00001, \text{ itd.}$$

Pisanje brojeva pomoću potencije broja 10:

Broj 20 000 npr. možemo zamisliti kao proizvod brojeva 2 i 10 000 i zapisati na sljedeći način:
 $20000 = 2 \cdot 10000 = 2 \cdot 10^4$

Broj 140 000, pomoću potencije broja 10, možemo zapisati na više načina:

$$140\ 000 = 14 \cdot 10\ 000 = 14 \cdot 10^4$$

ili

$$140\ 000 = 1,4 \cdot 100\ 000 = 1,4 \cdot 10^5$$

Broj 0,0003 možemo zamisliti kao proizvod brojeva 3 i 0,0001 i zapisati na sljedeći način:
 $0,0003 = 3 \cdot 0,0001 = 3 \cdot 10^{-4}$

Broj 0,000025 možemo zamisliti kao proizvod brojeva 25 i 0,000001 i zapisati ovako:

$$0,000025 = 25 \cdot 0,000001 = 25 \cdot 10^{-6}$$

ili

$$0,000025 = 2,5 \cdot 0,00001 = 2,5 \cdot 10^{-5}$$

Ako broj 0,000025 zapišemo kao $25 \cdot 10^{-6}$, onda nam eksponent pokazuje koliko cifara iza decimalnog zareza sadrži taj broj napisan u decimalnom obliku.

Tako je npr.

$$0,0176 = 176 \cdot 0,0001 = 176 \cdot 10^{-4}$$

$$0,005268 = 5268 \cdot 10^{-6}, \text{ itd.}$$

Uradi samostalno:

1. Sljedeće brojeve napiši pomoću potencije broja 10:

a) $0,19 = 19 \cdot 0,01 = 19 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

b) $5\ 000\ 000 = 5 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 5 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

c) $1\ 720\ 000\ 000 = 172 \cdot \underline{\hspace{2cm}} = 1,72 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

d) $6\ 450 = 6,45 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

e) $12\ 000 = \underline{\hspace{2cm}}$

f) $0,005 = 5 \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

e) $0,0000000048 = \underline{\hspace{2cm}}$

VAŽNO: Kod pretvaranja većih jedinica u manje, zadana vrijednost se množi sa dekadskom jedinicom određenom datim prefiksom.

Npr. $2,5 \text{ km} = 2,5 \cdot 1\ 000 \text{ m} = 2\ 500 \text{ m} = 2\ 500 \cdot 100 \text{ cm} = 250\ 000 \text{ cm}$, itd.

Kod pretvaranja manjih jedinica u veće, zadana vrijednost se dijeli sa dekadskom jedinicom reda određenog datim prefiksom.

Npr. $36 \text{ cm} = (36 : 100)\text{m} = 0,36 \text{ m} = (0,36 : 1\ 000)\text{km} = 0,00036 \text{ km}$, itd.

Zadaci za vježbu

1. Dužinu od $250 \mu\text{m}$ izrazi u cm.

Rješenje:

Prvo ćemo zadatu vrijednost izraziti u osnovnoj jedinici, tj.

$$250 \mu\text{m} = (250 : 1\ 000\ 000)\text{m} = 0,00025 \text{ m}$$

Kako je $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, možemo pisati

$$0,00025 \text{ m} = 0,00025 \cdot 100 \text{ cm} = 0,025 \text{ cm}$$

$$\mathbf{250 \mu\text{m} = 0,025 \text{ cm} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}}$$

Zadatak se mogao rješiti i na sljedeći način:

Napišite odnos mjernih jedinica dužine

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\ 000 \text{ mm} = 1\ 000\ 000 \mu\text{m}$$

Iz ovog odnosa lahko uočavamo da je $100 \text{ cm} = 1000 \mu\text{m}$, pa je prema tome

$$1 \text{ cm} = 10\ 000 \mu\text{m}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1\ 000 \text{ mm} = 1\ 000\ 000 \mu\text{m},$$

Obzirom da pretvaramo iz manje jedinice u veću, zadatu vrijednost dijelimo sa 10 000.

$$250 \mu\text{m} = (250 : 10\ 000) \text{cm} = 0,025 \text{ cm} = 25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

2. Dužinu od 23 mm izrazi u cm i μm .

Rješenje:

Kao i u prethodnom zadatku, uočimo da je 1 mm 10 puta manji od 1 cm i 1000 puta veći od $1 \mu\text{m}$.

To znači da ćemo kod pretvaranja iz mm u cm zadatu vrijednost dijeliti sa 10, a kod pretvaranja iz mm u μm zadatu vrijednost množiti sa 100.

$$23 \text{ mm} = (23 : 10) \text{ cm} = 2,3 \text{ cm}$$

$$23 \text{ mm} = 23 \cdot 1000 \mu\text{m} = 23\ 000 \mu\text{m}$$

3. Dužinu od $0,5 \text{ km}$ izrazi u m, dm, cm i mm.

Rješenje:

$$0,5 \text{ km} = 0,5 \cdot 1000 \text{ m} = 500 \text{ m} = 5 \cdot 10^2 \text{ m}$$

$$0,5 \text{ km} = 0,5 \cdot 10\ 000 \text{ dm} = 5\ 000 \text{ dm} = 5 \cdot 10^3 \text{ dm}$$

$$0,5 \text{ km} = 0,5 \cdot 100\ 000 \text{ cm} = 50\ 000 \text{ cm} = 5 \cdot 10^4 \text{ cm}$$

$$0,5 \text{ km} = 0,5 \cdot 1\ 000\ 000 \text{ m} = 500\ 000 \text{ mm} = 5 \cdot 10^5 \text{ mm}$$

4. Sljedeće dužine poredaj po veličini (od najveće ka najmanjoj): $0,03 \text{ km}$, 14 m , 725 cm i $36\ 500 \text{ mm}$.

Rješenje:

Da bismo zadane vrijednosti dužine uopće mogli upoređivati, a zatim poredati po veličini, moramo ih prvo izraziti u osnovnoj jedinici.

$$0,03 \text{ km} = 0,03 \cdot 1000 \text{ m} = 30 \text{ m}$$

$$14 \text{ m} = 14 \text{ m}$$



$$\begin{aligned} 725 \text{ cm} &= (725 : 100) \text{ m} = 7,25 \text{ m} \\ 36\,500 \text{ mm} &= (36\,500 : 1\,000) \text{ m} = 36,5 \text{ m} \\ 36,5 \text{ m} &> 30 \text{ m} > 14 \text{ m} > 7,25 \text{ m} \\ \text{ili} \\ 36\,500 \text{ mm} &> 0,03 \text{ km} > 14 \text{ m} > 725 \text{ cm} \end{aligned}$$

5. Tri puta je pažljivo mjerena dužina nekog tijela i tom prilikom su dobijeni sljedeći podaci: $l_1 = 125 \text{ mm}$; $l_2 = 125,5 \text{ mm}$ i $l_3 = 125,1 \text{ mm}$. Izračunaj srednju vrijednost dužine tijela, apsolutne greške pojedinih mjerena, srednju apsolutnu grešku i relativnu grešku.

Rješenje:

$$\begin{aligned} l_1 &= 125 \text{ mm} \\ l_2 &= 125,5 \text{ mm} \\ l_3 &= 125,1 \text{ mm} \end{aligned}$$

$l_{sr} = \frac{l_1 + l_2 + \dots + l_n}{n}$, obzirom da su vršena tri mjerena pišemo:

$$l_{sr} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3} = \frac{125 \text{ mm} + 125,5 \text{ mm} + 125,1 \text{ mm}}{3}$$

$$l_{sr} = 125,2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_1 = |l_{sr} - l_1| = |125,2 \text{ mm} - 125 \text{ mm}|$$

$$\Delta l_1 = 0,2 \text{ mm}$$

$$\Delta l_2 = |l_{sr} - l_2| = |125,2 \text{ mm} - 125,5 \text{ mm}|$$

$$\Delta l_2 = 0,3 \text{ mm}$$

$$\Delta l_3 = |l_{sr} - l_3| = |125,2 \text{ mm} - 125,1 \text{ mm}|$$

$$\Delta l_3 = 0,1 \text{ mm}$$

$$\Delta l_{sr} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3}{3} = \frac{0,2 \text{ mm} + 0,3 \text{ mm} + 0,1 \text{ mm}}{3}$$

$$\Delta l_{sr} = 0,2 \text{ mm}$$

Rezultat mjerena zapisujemo na sljedeći način:

$$l = l_{sr} \pm \Delta l_{sr}; l = 125,2 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_{sr}}{l_{sr}} \cdot 100\% = \frac{0,2 \text{ mm}}{125,2 \text{ mm}} \cdot 100\% ; \varepsilon = 0,16\%$$

6. Poluprečnik naše planete iznosi oko $R = 6370 \text{ km}$. Izrazi ovu vrijednost u metrima preko potencije broja 10.

Rješenje:

$$R = 6370 \text{ km} = 6370 \cdot 1\,000 \text{ m} = 6\,370\,000 \text{ m}$$

$$R = 6370 \text{ km} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

7. Dužinu žice, čija je srednja vrijednost 125 mm, Enes je mjerio sa greškom od 2 %, a Aida sa odstupanjem $\pm 1 \text{ mm}$ od srednje vrijednosti. Ko je preciznije mjerio?

Rješenje:

Važno je uočiti da je Enesovo odstupanje u mjerenu dato kao relativna greška (ε), dok je Aidino odstupanje u mjerenu dato u vidu srednje apsolutne greške (Δl_{sr}). Prema tome, zadatak se može riješiti na dva načina.

1. način

Srednja apsolutna greška Aidinog mjereja iznosi ± 1 mm i radi upoređivanja sa Enesovim mjerenjem treba je izraziti u procentima:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l_{sr}}{l_{sr}} \cdot 100 \% = \frac{1 \text{ mm}}{125 \text{ mm}} \cdot 100 \% = 0,8 \%$$

Aidino mjerjenje je preciznije.

2. način

Izračunajmo koliko je Enesovo odstupanje u mjerenu izraženo u mm, tj. izračunajmo srednju apsolutnu grešku Enesovog mjerena, a zatim je uporedimo sa srednjom apsolutnom greškom Aidinog mjerena:

$$\Delta l_{sr} = \frac{\varepsilon}{100 \%} \cdot l_{sr} = \frac{2 \%}{100 \%} \cdot 125 \text{ mm} = 2,5 \text{ mm}$$

8. Na dužini od $1\mu\text{m}$ može se nanizati 10 000 atoma vodika. Koliko se takvih atoma može nanizati na dužinu od 1mm?

Rješenje:

Iz odnosa mjernih jedinica dužine lahko uočavamo da je $1 \text{ mm} = 1000 \mu\text{m}$. Prema tome, na dužinu od 1mm se može nanizati 1 000 puta više atoma vodika nego na dužinu od $1\mu\text{m}$. Dakle, na dužinu od 1mm se može nanizati $10000 \cdot 1000 = 10000000$ (deset miliona) atoma vodika.

9. Površinu od $0,2 \text{ m}^2$ izrazi u dm^2 , cm^2 i mm^2 .

Rješenje:

U ovom zadatku vršimo pretvaranje iz veće jedinice u manje. Pri tome moramo imati u vidu da je

$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, zatim da je $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, te da je $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$. Osim toga, trebamo znati i da je $1 \text{ m}^2 = 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m}$.

$$0,2 \text{ m}^2 = 0,2 \cdot 1 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 0,2 \cdot 10 \text{ dm} \cdot 10 \text{ dm} = \mathbf{20 \text{ dm}^2}$$

Na isti način površinu od $0,2 \text{ m}^2$ izražavamo i u preostalim jedinicama:

$$0,2 \text{ m}^2 = 0,2 \cdot 100 \text{ cm} \cdot 100 \text{ cm} = \mathbf{2000 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^2}$$

$$0,2 \text{ m}^2 = 0,2 \cdot 1000 \text{ mm} \cdot 1000 \text{ mm} = \mathbf{200000 \text{ mm}^2 = 2 \cdot 10^5 \text{ mm}^2}$$

10. Površinu od $7,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2$ izrazi u m^2 , dm^2 i mm^2 .

Rješenje:

$$7,5 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 = 7,5 \cdot 10000 \text{ cm}^2 = 75000 \text{ cm}^2$$

$$75000 \text{ cm}^2 = 75000 \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} = \mathbf{7,5 \text{ m}^2}$$

$$75000 \text{ cm}^2 = 75000 \cdot 0,1 \text{ dm} \cdot 0,1 \text{ dm} = \mathbf{750 \text{ dm}^2}$$



$$75\,000 \text{ cm}^2 = 75\,000 \cdot 10 \text{ mm} \cdot 10 \text{ mm} = 7\,500\,000 \text{ mm}^2 = 7,5 \cdot 10^6 \text{ mm}^2$$

11. Sljedeće vrijednosti površine poredaj po veličini (od najmanje ka najvećoj): $0,00031 \text{ km}^2$, 412 m^2 , $64\,000 \text{ cm}^2$ i $9\,200 \text{ dm}^2$.

Rješenje:

$$0,00031 \text{ km}^2 = 0,00031 \cdot 1\,000 \text{ m} \cdot 1\,000 \text{ m} = 310 \text{ m}^2$$

$$412 \text{ m}^2 = 412 \text{ m}^2$$

$$64\,000 \text{ cm}^2 = 64\,000 \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} = 6,4 \text{ m}^2$$

$$9\,200 \text{ dm}^2 = 9\,200 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} = 92 \text{ m}^2$$

$$6,4 \text{ m}^2 < 92 \text{ m}^2 < 310 \text{ m}^2 < 412 \text{ m}^2$$

ili

$$64\,000 \text{ cm}^2 < 9\,200 \text{ dm}^2 < 0,00031 \text{ km}^2 < 412 \text{ m}^2$$

12. Izračunaj površinu zidne keramičke pločice na slici i izrazi je u m^2 . Koliko je takvih pločica potrebno da bi se njima pokrio dio zida površine $4,5 \text{ m}^2$?

Rješenje:

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$\underline{S = 4,5 \text{ m}^2}$$

$$S_1 = ?$$

$$n = ?$$

$$S_1 = a \cdot a = 15 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm}$$

$$S_1 = 225 \text{ cm}^2$$

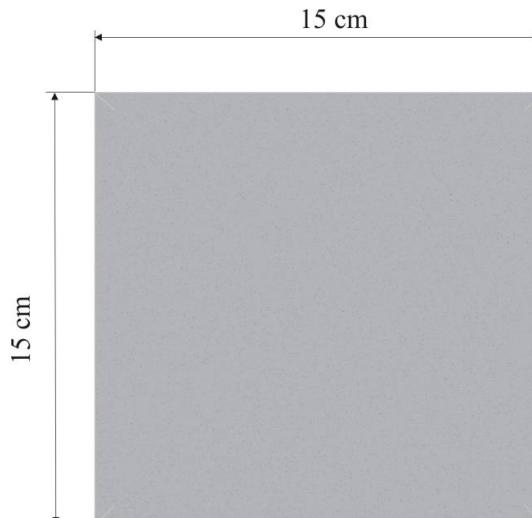
$$225 \text{ cm}^2 = 225 \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} = 0,0225 \text{ m}^2$$

$$S_1 = 0,0225 \text{ m}^2$$

$$S = n \cdot S_1 \Rightarrow n = \frac{S}{S_1}$$

$$n = \frac{S}{S_1} = \frac{4,5 \text{ m}^2}{0,0225 \text{ m}^2}$$

$$n = 200$$



13. Zadane vrijednosti zapremine izrazi u m^3 : 200 dl , 570 cm^3 i $60\,000 \text{ mm}^3$.

Rješenje:

$$200 \text{ dl} = 200 \cdot 0,1 \text{ l} = 20 \text{ l} = 20 \text{ dm}^3 = 20 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,02 \text{ m}^3$$

$$570 \text{ cm}^3 = 570 \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} \cdot 0,01 \text{ m} = 0,00057 \text{ m}^3 = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$60\,000 \text{ mm}^3 = 60\,000 \cdot 0,001 \text{ m} \cdot 0,001 \text{ m} \cdot 0,001 \text{ m} = 0,00006 \text{ m}^3 = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

14. Bazen, oblika kvadra, ima dužinu 20 m , širinu 10 m i prosječnu dubinu $1,5 \text{ m}$. Koliko litara vode stane u bazen kada se on napuni do vrha?

Koliko pločica dimenzija $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ je potrebno da se pokrije cijelokupna unutrašnjost bazena?

Rješenje:

$$a = 20 \text{ m}$$

$$b = 10 \text{ m}$$

$$h = 1,5 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= 20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2 = \\ &= (400 : 10000) \text{ m}^2 = 0,04 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$V = ? (\text{l})$$

$$n = ?$$

$$V = a \cdot b \cdot h$$

Kako je $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$, poželjno je dimenzije bazena izraziti u dm:

$$V = 200 \text{ dm} \cdot 100 \text{ dm} \cdot 15 \text{ dm}$$

$$V = 300000 \text{ dm}^3 = 300000 \text{ l} = 3000 \text{ hl}$$

Ukupnu površinu koju treba pokriti pločicama računamo kao površinu kvadra, ali bez gornje osnove:

$$S = a \cdot b + 2a \cdot h + 2b \cdot h$$

$$S = 20 \text{ m} \cdot 10 \text{ m} + 2 \cdot 20 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} + 2 \cdot 10 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m}$$

$$S = 200 \text{ m}^2 + 60 \text{ m}^2 + 30 \text{ m}^2$$

$$S = 290 \text{ m}^2$$

$$S = n \cdot S_1 \Rightarrow n = \frac{S}{S_1} = \frac{290 \text{ m}^2}{0,04 \text{ m}^2}$$

$$n = 7250 \text{ komada pločica}$$

15. Koliko košta sirovina za izradu željeznog stuba oblika valjka, poprečnog presjeka 75 cm^2 i visine 4 m, ako 1 kg željeza košta 0,6 KM. Gustina željeza je $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

Rješenje:

$$S = 75 \text{ cm}^2 = 0,0075 \text{ m}^2$$

$$h = 4 \text{ m}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c_1 = 0,6 \frac{\text{KM}}{\text{kg}}$$

$$c = ?$$

Obzirom da je zadana cijena željeza po jedinici mase, potrebno je prvo odrediti koliku masu ima željezni stub datih dimenzija.

$$m = \rho \cdot V$$

$$V = S \cdot h$$

$$V = 0,0075 \text{ m}^2 \cdot 4 \text{ m}$$

$$V = 0,03 \text{ m}^3$$

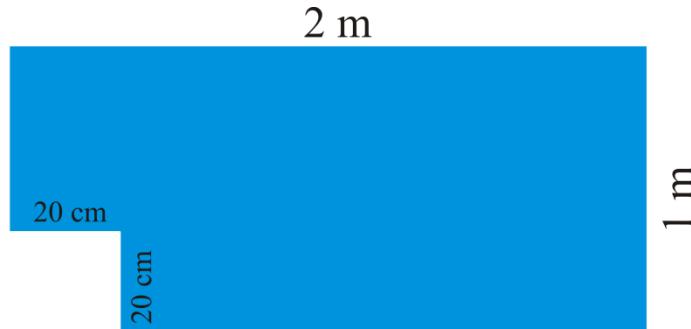
$$m = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,03 \text{ m}^3$$

$$m = 234 \text{ kg}$$



Zadaci za samostalan rad

- Debljina lista knjige je 0,005 cm. Koliko je to μm ? Koliko takvih listova čini knjigu debljine 8 mm (ne računajući korice)?
- Tri puta je mjerena dužina metalne šipke i tom prilikom su dobijeni sljedeći podaci: $l_1 = 245,0 \text{ mm}$, $l_2 = 244,9 \text{ mm}$ i $l_3 = 245,3 \text{ mm}$. Izračunaj srednju vrijednost dužine šipke, apsolutne greške pojedinih mjerena, srednju apsolutnu grešku i relativnu grešku.
- Učenik za sebe kaže da je visok $1,6 \text{ m} \pm 2 \text{ cm}$. Kolika je greška ovog mjerjenja izražena u procentima?
- Kolika je površina figure prema podacima na slici izražena u m^2 ?



- Dvorišna staza sadrži 735 komada kamenih pločica oblika pravougaonika čije su dimenzije $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Kolika je ukupna površina staze izražena u dm^2 i m^2 ?
 - Učenik je dobio zadatak da odredi od kojeg materijala je napravljen prsten. Na raspolaganju je imao veoma preciznu vagu i menzuru sa vodom.
- Izrazi masu prstena u mg, g, dag i kg.
 - Od kojeg je materijala prsten?

Potrebne konstante se nalaze na kraju Kataloga.



Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. $d = 50 \mu\text{m}$, $n = 160$ listova; 2. $l_{sr} = 245,1 \text{ mm}$; $\Delta l_1 = 0$, $\Delta l_2 = 0,2 \text{ mm}$, $\Delta l_3 = 0,2 \text{ mm}$, $\Delta l_{lsr} = 0,133 \text{ mm}$, $\varepsilon = 0,54 \%$; 3. $\varepsilon = \frac{2\text{cm}}{160\text{cm}} \cdot 100 \% = 1,25 \%$; 4. $S = 1,96 \text{ m}^2$; $S = 1470 \text{ dm}^2 = 14,7 \text{ m}^2$; 6. $m = 35\,600 \text{ mg} = 35,6 \text{ g} = 3,56 \text{ dag} = 0,0356 \text{ kg}$, $V = 4 \text{ cm}^3$, $\rho = \frac{m}{V} = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ - od bakra

2. Međudjelovanje. Sila

Pregled najvažnijih formula

Hukov zakon

$$F = k \cdot x$$

Sila je vektorska veličina, a jedinica za silu u SI je njutn (N).

k - koeficijent elastičnosti opruge, mjerna jedinica $\frac{N}{m}$; x - izduženje opruge, jedinica je metar (m).

Intenzitet rezultante sila koje imaju isti pravac i smjer djelovanja jednak je zbiru intenziteta tih sila:

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n$$

Intenzitet rezultante dvije sile koje djeluju po istom pravcu u međusobno suprotnim smjerovima jednak je razlici intenziteta tih sila:

$$F_R = F_1 - F_2,$$

gdje je $F_1 > F_2$. Rezultanta ima smjer veće sile.

Intenzitet rezultante dvije sile koje djeluju u istoj napadnoj tački pod pravim uglom računa se prema formuli:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Intenzitet momenta sile se računa prema formuli:

$$M = F \cdot d$$

Moment sile je vektorska veličina, a jedinica za moment sile u SI je njutnmetar (Nm).

Zadaci za vježbu

- Opruga dinamometra se istegne 4 cm kad na nju djelujemo silom od 10 N. Koliko istezanje opruge odgovara sili od 6 N?

Rješenje:

$$x_1 = 4 \text{ cm}$$

$$F_1 = 10 \text{ N}$$

$$\underline{F_2 = 6 \text{ N}}$$

$$x_2 = ?$$

$$F_1 = k \cdot x_1 \Rightarrow k = \frac{F_1}{x_1}; k = 2,5 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

$$F_2 = k \cdot x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{F_2}{k} = 2,4 \text{ cm}$$



2. Izračunaj rezultantu sile $F_1 = 12 \text{ N}$ i $F_2 = 9 \text{ N}$, ako sile djeluju:
- U istom pravcu i smjeru.
 - U istom pravcu, a međusobno suprotnim smjerovima.
 - U istoj napadnoj tački pod pravim ugлом.

Rješenje:

a) $F_R = F_1 + F_2 = 21 \text{ N}$

b) $F_R = F_1 - F_2 = 3 \text{ N}$

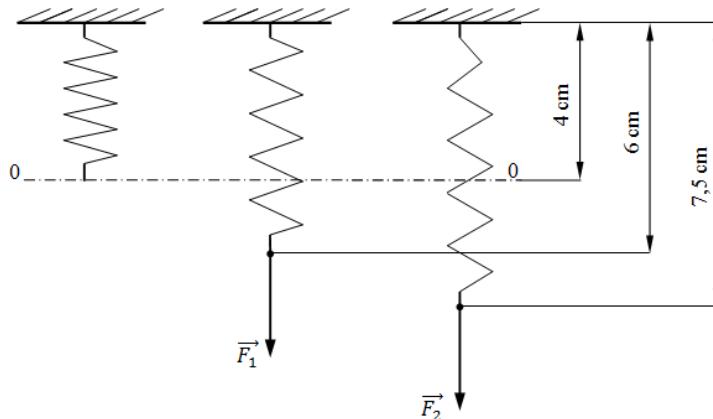
c)

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(12 \text{ N})^2 + (9 \text{ N})^2}$$

$$F_R = \sqrt{225 \text{ N}^2}$$

$$F_R = 15 \text{ N}$$

3. Na osnovu podataka sa slike odredi intenzitet sile F_2 , ako je intenzitet sile $F_1 = 4 \text{ N}$.



Rješenje:

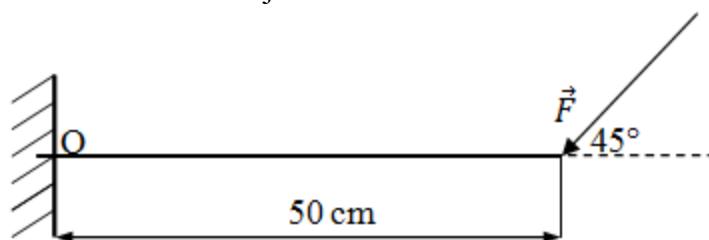
Sa slike se vidi da sila F_1 istegne oprugu dinamometra 2 cm, pa je

$$k = \frac{F_1}{x_1} = \frac{4 \text{ N}}{2 \text{ cm}} = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Sa slike takođe vidimo da sila F_2 istegne oprugu dinamometra 3,5 cm, pa je

$$F_2 = k \cdot x_2 = 2 \frac{\text{N}}{\text{cm}} \cdot 3,5 \text{ cm}; F_2 = 7 \text{ N}$$

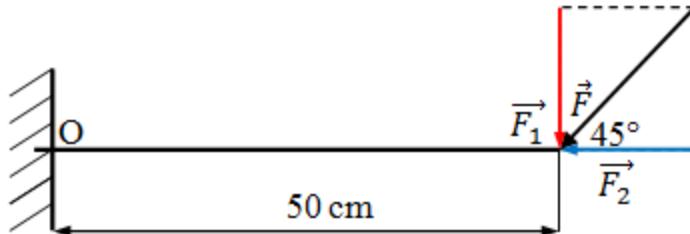
4. Prema podacima sa slike izračunaj moment sile $F = 20 \text{ N}$ za tačku O.





Rješenje:

Silu F je potrebno rastaviti na dvije međusobno okomite komponente. Samo vertikalna komponenta sile F – sila F_1 vrši moment sile. Horizontalna komponenta ne vrši moment sile jer pravac djelovanja te sile (napadna linija sile) prolazi tačkom O.



Potrebno je izračunati komponentu F_1 . Obzirom da sila F djeluje pod ugлом 45° u odnosu na horizontalnu (i vertikalnu) ravan, komponente obrazuju kvadrat, kojeg je sila F dijagonala. Prema tome je $F_1 = F_2$.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 = 2F_1^2$$

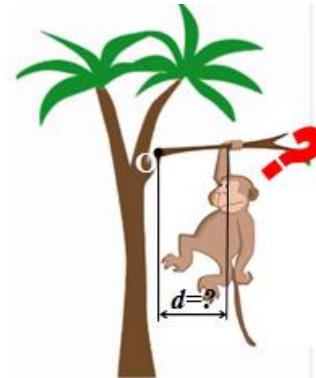
$$F_1^2 = \frac{F^2}{2}; F_1 = \sqrt{\frac{F^2}{2}}$$

$$F_1 = F \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707 \cdot 20 \text{ N}; F_1 = 14,14 \text{ N}$$

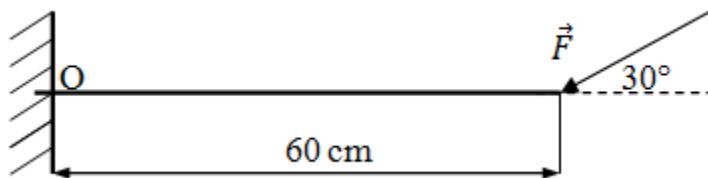
$$M = F_1 \cdot d = 14,14 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m} = 7,07 \text{ Nm}$$

Zadaci za samostalan rad

- Opruga dinamometra se istegne 2 cm kad na nju djelujemo silom od 10 N. Koliko će se istegnuti ta ista opruga pod djelovanjem sile od 15 N?
- Posmatraj crtež! Masa majmuna je 6 kg. Na kojoj se maksimalnoj udaljenosti od tačke O može nalaziti majmun a da grana ne pukne, ako je maksimalni moment sile kojeg grana može podnijeti 20 Nm?



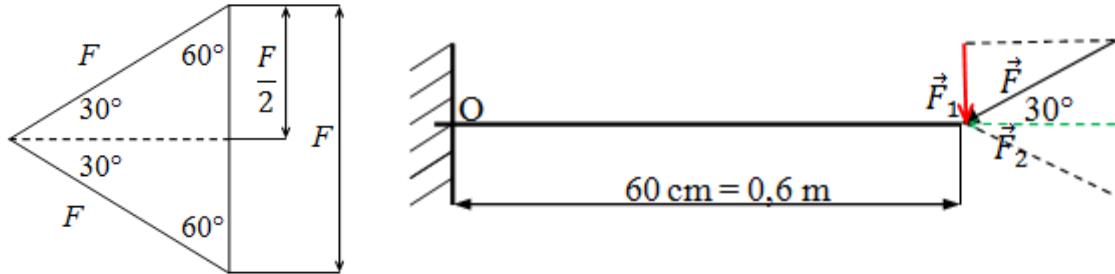
- Prema podacima sa slike izračunaj moment sile $F = 50 \text{ N}$ za tačku O.



- Učenici su na času fizike pravili vlastiti dinamometar tako što su elastičnu oprugu pričvrstili za linijar. Da bi odredili konstantu opruge dinamometra i formirali mjeru skalu, na slobodan kraj opruge su okačili uteg mase 100 g. Ustanovili su da se tom prilikom opruga istegne 9,8 mm. Kolika je konstanta opruge izražena u N/m?



Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. $x_2 = 3 \text{ cm}$; 2. $F = G = m \cdot g = 58,86 \text{ N}$, $d = \frac{M}{F}$; $d = 0,34 \text{ m} = 34 \text{ cm}$;
3. Uputstvo: Formirati jednakostrojni trougao, kao na slici. Tada je horizontalna komponenta visina trougla i ona ne vrši moment sile, dok je vertikalna komponenta jednaka polovini stranice, tj. polovini sile F.



$$F_1 = \frac{F}{2} = 25 \text{ N}$$

$$M = F \cdot d = 15 \text{ Nm}$$

$$4. G = mg = 0,1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,981 \text{ N}; 9,8 \text{ mm} = 0,0098 \text{ m}; k = \frac{F}{x} = \frac{0,981 \text{ N}}{0,0098 \text{ m}}; k = 100,1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

3. Osnove kinematike

Pregled najvažnijih formula

- Brzina kod ravnomjernog pravolinijskog kretanja je količnik pređenog puta i proteklog vremena:

$$v = \frac{s}{t} \Rightarrow s = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{s}{v}$$

- Pređeni put kod promjenjivog kretanja jednak je proizvodu srednje brzine i vremena kretanja:

$$s = v_{sr} \cdot t \Rightarrow v_{sr} = \frac{s}{t}$$

- Intenzitet srednjeg ubrzanja jednak je količniku prirasta brzine i vremena za koje se taj prirast brzine dogodio:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- Kod jednakoubrzanog pravolinijskog kretanja trenutna brzina, pređeni put i vrijeme:
- Kad tijelo ima početnu brzinu v_0 : $v = v_0 + at$ (1)
- Srednja brzina je data aritmetičkom sredinom brzine na početku i na kraju posmatranog vremenskog intervala:

$$v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (2)$$

$s = v_{sr} \cdot t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$; pošto je $v = v_0 + at \Rightarrow s = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} \cdot t = \frac{2v_0 t}{2} + \frac{at^2}{2}$, nakon

sređivanja se dobije: $s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (3)$

Ako kvadriramo jednačinu (1) i zamjenimo iz (3) dobijemo važnu formulu:

$$v^2 = (v_0 + at)^2 = v_0^2 + 2v_0 at + a^2 t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \underbrace{\left(v_0 t + \frac{at^2}{2} \right)}_s \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2as \quad *)$$

brzina kod jednakoubrzanog pravolinijskog kretanja

- Za slučaj kada se tijelo počne kretati iz stanja mirovanja (bez početne brzine) imamo da je:

$$v = at \quad (1')$$

$$s = \frac{at^2}{2} \quad (2')$$

$$v^2 = 2as \quad (3')$$

- Za jednakousporeno pravolinijsko kretanje važe ove formule:

$$v = v_0 - at \quad (1'')$$

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \quad (2'')$$

$$v^2 = v_0^2 - 2as \quad (3'')$$

- Iz izraza *) i (3'') možemo izvesti i ove formule:

$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$ za jednakoubrzano pravolinijsko kretanje, odnosno $a = \frac{v_0^2 - v^2}{2s}$ za jednakousporeno pravolinijsko kretanje

Zadaci za vježbu

- Sljedeće brzine izrazi u m/s: 54 km/h; 36 km/h; 108 km/h.

Rješenje:

$$54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 54 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{54000\text{m}}{3600\text{s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 36 \cdot \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$108 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Sljedeće brzine izrazi u km/h: 25 m/s; 20 m/s; 14 m/s; 10 m/s.

Rješenje:

$$25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 25 \cdot \frac{\frac{1}{1000}\text{km}}{\frac{1}{3600}\text{h}} = 25 \cdot \frac{3600\text{km}}{1000\text{h}} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 20 \cdot \frac{3600\text{km}}{1000\text{h}} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$14 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 50,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$10 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

- Po paralelnim prugama u istom smjeru kreću se dva voza, teretni stalnom brzinom 54 km/h i putnički, stalnom brzinom 90 km/h. Koliko sekundi će putnički voz preticati teretni, ako je dužina teretnog voza 115 m, a putničkog 195 m?

Rješenje:

$$v_1 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$l_1 = 115 \text{ m}$$

$$l_2 = 195 \text{ m}$$

$$\underline{t = ?}$$

$$s = l_1 + l_2 = 310 \text{ m}$$

Relativna brzina

$$v_R = v_2 - v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = \frac{s}{v_R} = 31 \text{ s}$$

4. Učeniku je potrebno 20 minuta da dođe od kuće do škole krećući se srednjom brzinom 3,6 km/h. U školi, 10 minuta prije početka časa, ustanovio je da je zaboravio svesku. Kojom brzinom treba da ode i donese svesku, a da ne zakasni na nastavu?

Rješenje:

Udaljenost od kuće do škole je $s = v_1 t_1 = 1200 \text{ m}$. Da ode i vrati se za 10 min potrebno je da pređe put 2s, te je tražena brzina:

$$v_2 = \frac{2s}{t_2} = \frac{2 \cdot 1200 \text{ m}}{600 \text{ s}} = \frac{2400 \text{ m}}{600 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

5. Čamac se kretao niz rijeku brzinom od 70 km/h u odnosu na njenu obalu, a uz rijeku brzinom od 62 km/h. Odredi brzinu čamca u odnosu na rijeku i brzinu rijeke u odnosu na obalu.

Rješenje:

$$v_1 = 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \quad v_1 = v_c + v_r \quad (1)$$

$$+ v_2 = v_c - v_r \quad (2)$$

$$v_2 = 62 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$\underline{v_c = ?}$$

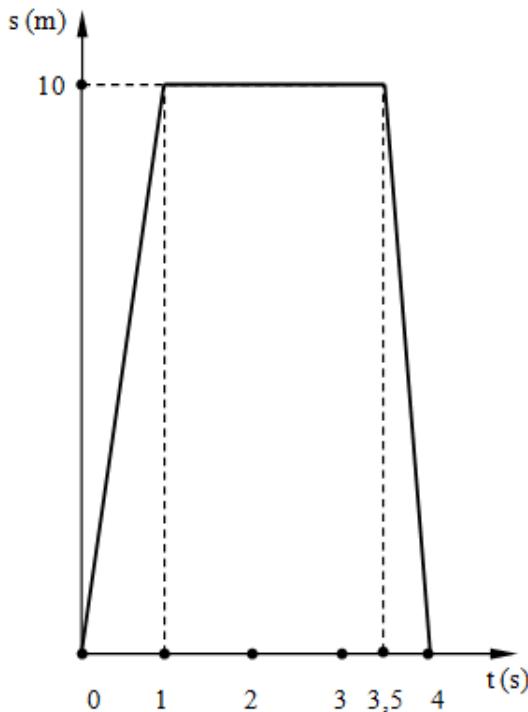
$$v_1 + v_2 = 2v_c \Rightarrow v_c = \frac{v_1 + v_2}{2} = 66 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_r = ?$$

iz jednačine (2) slijedi da je: $v_r = v_c - v_2 = 4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$



6. Na slici je prikazan grafik puta nekog tijela. Nacrtaj odgovarajući grafik brzine.



Rješenje:

Zadatak se može riješiti na način da računski odredimo pojedine vrijednosti brzine i na osnovu dobivenih podataka nacrtamo gafik.

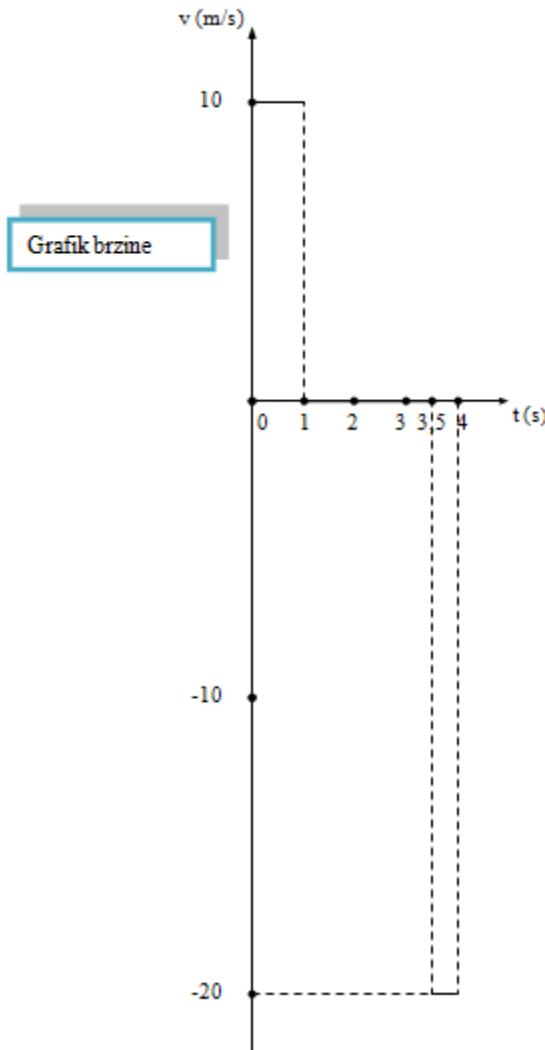
$$v_1 = \frac{s_1}{t_1} = \frac{10m}{1s} = 10 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = 0$$

$$v_3 = \frac{s_2}{t_2} = \frac{10m}{0,5s} = 20 \frac{m}{s}$$

Napomene:

1. brzina $v_2 = 0$ jer na grafiku nema promjene puta u intervalu od 1s do 3,5 s;
2. kod crtanja grafika brzine, brzinu v_3 prikazati kao na slici „Grafik brzine“ jer se tijelo kreće u suprotnom smjeru u odnosu na prvu sekundu kretanja.



7. Na četiri jednaka dijela puta tijelo se kretalo jednoliko različitim brzinama: $v_1=3 \text{ m/s}$, $v_2=4 \text{ m/s}$, $v_3=9 \text{ m/s}$ i $v_4=2 \text{ m/s}$. Kolika je bila srednja brzina tijela? (Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike 2007. Mirićina)

Rješenje:

$$\begin{aligned} v_{sr} &= \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}, \quad s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s, \quad v_{sr} = \frac{4s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} + \frac{s}{v_3} + \frac{s}{v_4}} = \\ &= \frac{4s}{\frac{s}{3} + \frac{s}{4} + \frac{s}{9} + \frac{s}{2}} = \frac{4s}{\frac{12s + 9s + 4s + 18s}{36}} = \frac{144s}{43s} = 3,35 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

8. Automobil se kreće stalnom brzinom $v_0 = 72 \text{ km/h}$. Na udaljenosti od 15 m primijeti odronjenu stijenu i u istom trenutku počne kočiti sa maksimalno mogućim usporenjem $a = 14 \text{ m/s}^2$. Da li će udariti u stijenu?



Rješenje:

$$v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 0$$

$$a = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$l = 15 \text{ m}$$

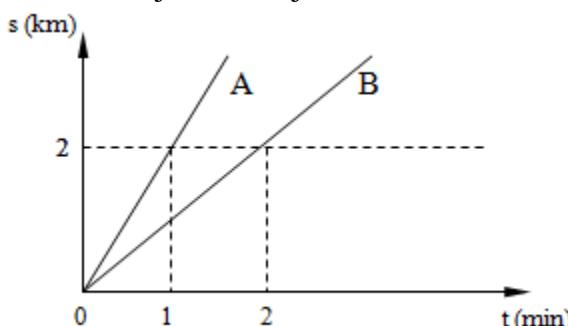
$$s = ?$$

$$v^2 = v_0^2 - 2as; v_0^2 - 2as = 0$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 14 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{400 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{28 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 14,3 \text{ m}$$

Kako je $s < l$ automobil neće udariti u stijenu.

9. Kolika je brzina tijela A i B? Brzinu izraziti u m/s i km/h.



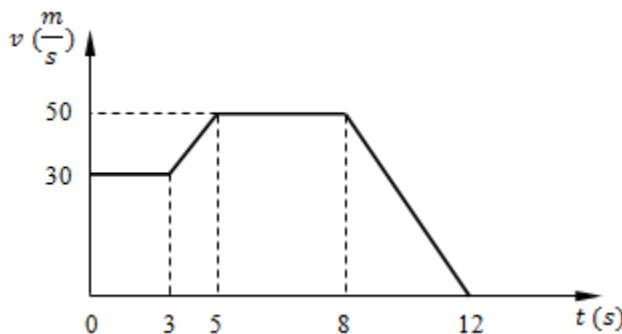
Rješenje :

$$v_A = \frac{s_A}{t_A} = \frac{2 \text{ km}}{1 \text{ min}} = \frac{2 \text{ km}}{\frac{1}{60} \text{ h}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$v_A = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 33,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_B = \frac{s_B}{t_B} = \frac{2 \text{ km}}{2 \text{ min}} = \frac{2 \text{ km}}{\frac{2}{60} \text{ h}} = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 16,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10. Na slici je dat grafik brzine nekog tijela. Koliki je put tijelo prešlo tokom kretanja?



Rješenje:

Sa grafikaочitavamo da se prve tri sekunde tijelo kretalo ravnomjerno pravolinijski brzinom $v_1 = 30 \text{ m/s}$, pa je pređeni put:

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 90 \text{ m}.$$

Naredne dvije sekunde kretanje je bilo jednakoubrzano; početna brzina tijela je $v_0 = 30 \text{ m/s}$, krajnja brzina za taj vremenski interval je $v = 50 \text{ m/s}$ (sa grafika), pa pređeni put računamo prema formuli:



$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{50 \frac{m}{s} - 30 \frac{m}{s}}{2s} = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$s_2 = 30 \frac{m}{s} \cdot 2s + \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot 4s^2}{2} = 80m$$

Sljedeće tri sekunde kretanje je ravnomjerno pravolinijsko: $s_3 = v_3 \cdot t_3 = 150m$.

Na kraju, tijelo se kreće 4 sekunde jednakousporeno pravolinijski do zaustavljanja:

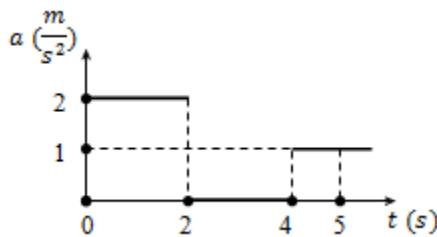
$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{50 \frac{m}{s} - 0}{4s} = 12,5 \frac{m}{s^2}$$

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} = 50 \frac{m}{s} \cdot 4s - \frac{12,5 \frac{m}{s^2} \cdot 16s^2}{2} = 100m$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 420m$$

Ukupni pređeni put je 420 metara.

11. Iz grafičke zavisnosti ubrzanja od vremena naći zavisnost brzine od vremena, te izračunati pređeni put tijela za 5 sekundi. Uzeti da je početna brzina tijela nula.



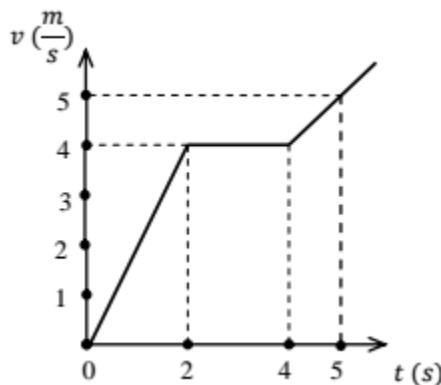
Rješenje:

Sa grafika vidimo da je početno ubrzanje tijela 2 m/s^2 , te da se tijelo tim ubrzanjem kretalo 2 sekunde. Zatim se naredne 2 sekunde nastavilo kretati stalnom brzinom, koju je postiglo na kraju prethodnog vremenskog intervala jer je $a_2 = 0$, a od četvrte sekunde se nastavlja kretati pravolinijski stalnim ubrzanjem od 1 m/s^2 .

$$\begin{aligned} v_0 &= 0 \\ v_1 &= a_1 \cdot t_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{s} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_2 &= v_1 + 0 \cdot t_2 = v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_3 &= v_2 + a_3 \cdot t_3 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{s} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$



Grafik zavisnosti brzine od vremena:



Pređeni put ćemo podijeliti na tri etape jer tijelo tokom 5 sekundi opisuje tri različite vrste kretanja i to: jednakoubrzano pravolinijsko bez početne brzine, zatim ravnomjerno pravolinijsko i jednakoubrzano pravolinijsko sa početnom brzinom.

$$s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 4 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 t_2 = 8 \text{ m}$$

$$s_3 = v_2 t_3 + \frac{a_3 t_3^2}{2} = 4,5 \text{ m}$$

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 16,5 \text{ m}$$

12. Tijelo se kreće jednakoubrzano po pravcu i za 1 sekundu pređe put od 10 metara. Koliki će put preći u petoj i šestoj sekundi kretanja?

Rješenje:

$$t = 1 \text{ s}$$

Prvo ćemo izračunati ubrzanje tijela:

$$s = 10 \text{ m}$$

$$t_1 = 4 \text{ s} \quad s = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{1 \text{ s}^2} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\underline{t_2 = 6 \text{ s}}$$

$$a = ?$$

$$\Delta s = ?$$

Pređeni put tokom pете i šeste sekunde dobijemo kad od pređenog puta za punih 6 sekundi oduzmemo pređeni put za pune 4 sekunde:

$$s_1 = \frac{a \cdot t_1^2}{2}$$

$$s_2 = \frac{a \cdot t_2^2}{2}$$

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{a}{2} \cdot (t_2^2 - t_1^2) = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot (36 \text{ s}^2 - 16 \text{ s}^2) = 200 \text{ m}$$

13. Iz gradova A i B, koji se nalaze na međusobnom rastojanju $l = 120 \text{ km}$, istovremeno kreću dva vozila jedno drugom u susret. Brzine vozila su stalne i iznose $v_1 = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ i

$v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Nakon kojeg vremena i na kojem rastojanju x od grada C, koji se nalazi na polovni puta između gradova A i B će se susresti vozila?

Rješenje:

$$l = 120 \text{ km}$$

$$v_1 = 20 \text{ km/h}$$

$$v_2 = 60 \text{ km/h}$$

$$t = ?; x = ?$$

Pređeni put prvog vozila do trenutka susreta je $s_1 = v_1 t$ (1), a drugog $s_2 = v_2 t$ (2). Vrijeme proteklo do trenutka susreta vozila je jednako za oba vozila.

Saberemo li jednačine (1) i (2) dobćemo

$$s_1 + s_2 = v_1 t + v_2 t = t(v_1 + v_2)$$

Kako je $s_1 + s_2 = l$, možemo pisati

$$l = t(v_1 + v_2) \Rightarrow t = \frac{l}{(v_1 + v_2)}$$

Proteklo vrijeme do trenutka susreta vozila je

$$t = \frac{120 \text{ km}}{20 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 1,5 \text{ h}$$

Prvo vozilo će do trenutka susreta preći put

$$s_1 = v_1 t = 20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ h} = 30 \text{ km},$$

a drugo

$$s_2 = v_2 t = 90 \text{ km}.$$

Odnosno, od grada C to je udaljenost

$$x = \frac{l}{2} - s_1 = \frac{120 \text{ km}}{2} - 30 \text{ km} = 30 \text{ km}$$

ili

$$x = s_2 - \frac{l}{2} = 90 \text{ km} - \frac{120 \text{ km}}{2} = 30 \text{ km}$$

14. Izmjesti A u mjesto B, u intervalu od $t=10$ minuta, krenula su dva voza brzinama $v=30$ km/h. Kolikom brzinom se kreće treći voz u suprotnom smjeru ako susreće prva dva voza u vremenskom razmaku $t_1 = 4$ minute? (Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Tuzla 2015.)

Rješenje:

$$\text{Rastojanje između dva voza je } x = v \cdot t = 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{6} \text{ h} = 5 \text{ km}$$

Relativna brzina voza, koji ovim vozovima ide u susret, je $v_r = v_1 + v$

Rastojanje od 5 km taj voz pređe za 4 minute, odnosno $(4/60)$ h, ili $(1/15)$ h, pa se može pisati

$$x = v_r \cdot t = (v_1 + v) \cdot t$$



$$x = v_1 \cdot t + v \cdot t \Rightarrow v_1 = \frac{x - v \cdot t}{t}$$

$$v_1 = \frac{5 \text{ km} - 30 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1}{15} \text{ h}}{\frac{1}{15} \text{ h}} = 45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

15. Kada čovjek stoji na pokretnim stepenicama, on se popne na vrh stepeništa za 1 minutu.

Ako se penje uz stepenište koje miruje, popne se za 3 minute. Za koje vrijeme će stići čovjek do vrha stepeništa ako se kreće uz pokretne stepenice? (*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Lukavac 2014.*)

Rješenje:

Neka je dužina stepeništa l . Vrijeme za koje se popne čovjek koji stoji na pokretnim stepenicama je $t_1 = l/u$ gdje je u brzina stepenica. Slijedi da je $u = l/t_1$. Ako stepenice miruju, a čovjek se popne uz njih za vrijeme t_2 , tada je brzina čovjeka u odnosu na stepenice $v' = l/t_2$. Ako se stepenice kreću i čovjek se kreće uz njih, tada je brzina čovjeka u odnosu na nepokretni dio stepeništa $v = v' + u$, pa je vrijeme za koje će se popeti $t = l/v$. Iz podataka znamo da je $t_1 = 1 \text{ min}$, $t_2 = 3 \text{ min}$.

$$t = \frac{l}{v' + u} = \frac{l}{\frac{l}{t_2} + \frac{l}{t_1}}$$

Nakon sredivanja dobije se: $t = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 45 \text{ s}$

16. Neko vozilo se kreće brzinom od 30 m/s vozeći iz jednog mjesta u drugo, a potom se vратi nazad. Odredi kojom se brzinom treba kretati vozilo u povratku da bi srednja vrijednost njegove brzine iznosila 20 m/s . (*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Tuzla 2016.*)

Rješenje:

$$s_1 = s_2 = s$$

$$v_1 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{sr} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}; v_{sr} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{v_{sr} v_1}{2v_1 - v_{sr}}$$

$$v_2 = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\underline{v_2 = ?}$$

17. Tijelo se kretalo jednakoubrzano pravolinijski i sa početnom brzinom, te je nakon 2 sekunde kretanja prešlo put od 12 metara i steklo brzinu 5 puta veću od početne. Koliko je ubrzanje tijela? (*Općinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike 2012. TK*)

Rješenje:

$$t = 2 \text{ s}$$

$$v = 5v_0$$

$$\underline{s = 12 \text{ m}}$$

$$a = ?$$

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$5v_0 = v_0 + a \cdot t$$

$$s = v_0 t + \frac{4v_0 t}{2} = v_0 t + 2v_0 t$$

$$a \cdot t = 4v_0 \Rightarrow a = \frac{4v_0}{t}$$

$$s = 3v_0 t \Rightarrow v_0 = \frac{s}{3t}$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

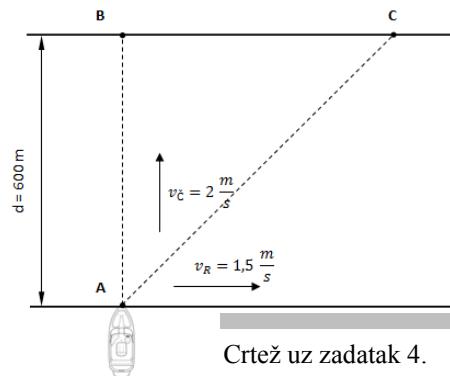
$$a = \frac{4}{t} \cdot \frac{s}{3t} = \frac{4s}{3t^2}$$

$$s = v_0 t + \frac{\frac{4v_0}{t} \cdot t^2}{2}$$

$$a = \frac{4 \cdot 12 \text{ m}}{3 \cdot 4 \text{ s}^2}; a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Zadaci za samostalan rad

1. Koliko sekundi će kamion sa prikolicom, dužine 14 m, koji se kreće stalnom brzinom od 50,4 km/h, prolaziti kroz tunel dužine 2 660 m?
2. Koliko sekundi je opterećen most, dužine 300 m, ako preko njega prelazi voz dužine 60 m, brzinom 54 km/h?
3. Pored nepokretnog posmatrača na putu prolaze kamion i automobil u vremenskom razmaku od 4 s. Kamion se kreće brzinom od 36 km/h. Naći brzinu automobila, ako se zna da će on sustići kamion nakon 5 sekundi od trenutka svog prolaska kraj posmatrača.
4. Čovjek u automobilu, koji se kreće brzinom 54 km/h, primjetio je da je voz koji se kreće prugom prošao pored njega za 8 sekundi. Pruga se nalazi paralelno pored puta. Dužina voza, koji se kreće u suprotnom smjeru od smjera kretanja automobila, je 200 metara. Odredi brzinu voza.
5. Čamac prelazi preko rijeke čija je širina 600 m, a brzina kretanja vode 1,5 m/s. Brzina kretanja čamca u odnosu na vodu i okomito na obalu je 2 m/s. Koliki put pređe čamac pri prelazu od jedne obale do druge obale? Koliko je rastojanje za koje se čamac pomjerio niz obalu?

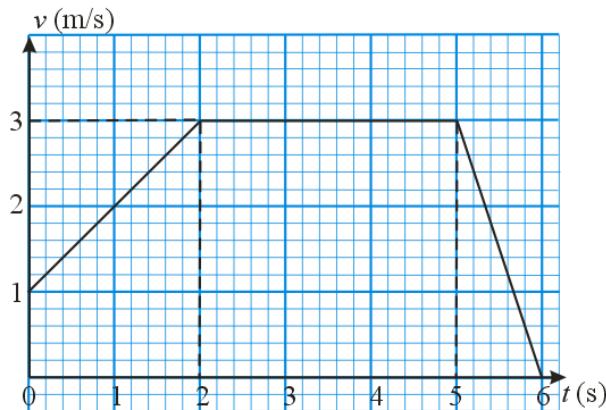


Crtež uz zadatak 4.

6. Sanke se kreću niz padinu dugu 12,5 m iz stanja mirovanja i stalnim ubrzanjem od 1 m/s². Koliku će brzinu imati sanke na kraju padine i za koje vrijeme će se spustiti niz padinu?
7. Pored voza, na istoj liniji sa prednjom stranom lokomotive, stoji biciklista. U istom momentu počinje da se kreće voz, jednakoubrzano sa ubrzanjem $a = 0,2 \text{ m/s}^2$, i čovjek stalnom brzinom $v = 7,2 \text{ km/h}$. Poslije kog vremena će voz stići čovjeka? Koliku brzinu će tada imati voz? Koliki put će preći čovjek za to vrijeme?
8. Kolika je srednja brzina automobila, ako on prvu polovinu puta pređe brzinom $v_1 = 50 \text{ km/h}$, a drugu polovinu puta brzinom $v_2 = 70 \text{ km/h}$?



9. Na osnovu datog grafika izračunaj koliki će put tjelo preći za 6 sekundi kretanja i kolika mu je srednja brzina. (*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike 2012. TK*)



10. Na četiri jednakih dijela puta tijelo se kretalo jednoliko ravnomjerno različitim brzinama: $v_1 = 3 \text{ m/s}$, $v_2 = 6 \text{ m/s}$, $v_3 = 12 \text{ m/s}$, $v_4 = 4 \text{ m/s}$. Kolika je bila srednja brzina tijela?
11. Voz se kretao pola sata brzinom 72 km/h, a zatim prešao 12 km brzinom 60 km/h, na kraju još 10 km za 20 minuta. Kolika je srednja brzina voza:
- Na cijelom putu?
 - Na prvoj polovini puta?
 - Na drugoj polovini puta?
12. Motociklista se kreće početnom brzinom 15 m/s. U jednom trenutku motociklista se počne kretati jednakousporeno i u toku četvrte sekunde pređe put od 7 m. Koliko je usporenje motocikliste?
13. Tijelo počinje da se kreće stalnim ubrzanjem. Za 4 s kretanja pređe put 16 m. Poslije toga, naredne 3 s kreće se ravnomjerno u istom smjeru.
- Prikazati kako su se tokom kretanja mijenjali ubrzanje, brzina i pređeni put, prvo tabelarno, a onda grafički.

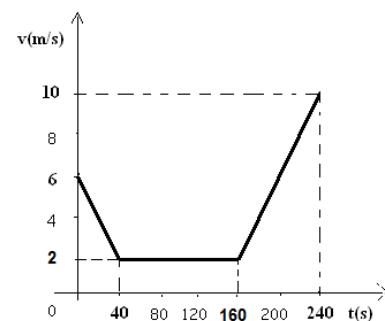
t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7
a(m/s²)								
v(m/s)								
s(m)								

- Na kojoj će udaljenosti tijelo biti nakon 3,5 s kretanja?
- U kojem će trenutku vremena brzina kretanja iznositi 5 m/s?
- Koliki će put tijelo preći tokom četvrte sekunde kretanja?

(*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2011.god.*)

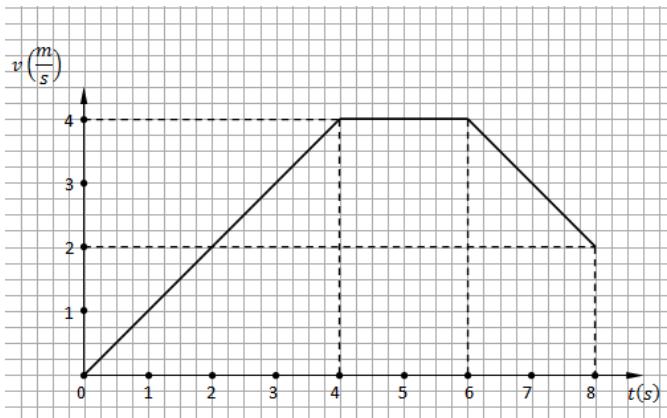
14. Na osnovu datog grafika:
- opisati kretanje automobila u toku 240 s;
 - odrediti ubrzanja tijela u intervalima od 0 do 40 s, od 40 s do 160 s i od 160 s do 240 s;
 - pročitati iz grafika put koji je tijelo prešlo za svih 240 s;
 - odrediti srednju putnu brzinu u toku svih 240 s;
 - odrediti da li se intenzitet srednje brzine u ovom slučaju razlikuje od srednje putne brzine

(*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2010.god.*)





15. Na crtežu je dat grafički prikaz brzine kretanja nekog tijela.



- Kako se tijelo keće u toku 8 s u pojedinim vremenskim intervalima?
- Nacrtati grafički prikaz ubrzanja u toku 8 s.
- Naći pređenu put za 8 s.
- Kolika je srednja brzina u toku 8 s?

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2008.god.)

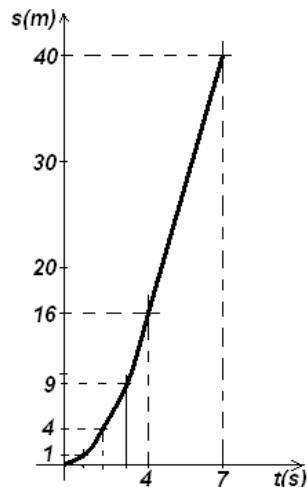
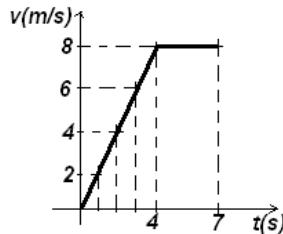
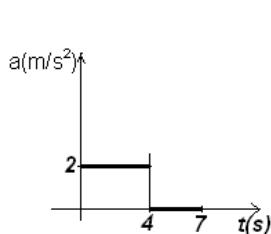
Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. Uputstvo: $l_1 = 14 \text{ m}$, $l_2 = 2660 \text{ m}$, $s = l_1 + l_2 = 2674 \text{ m}$; $v = 50,4 \text{ km/h} = 14 \text{ m/s}$, $t = \frac{s}{v} = 191 \text{ s}$; 2. Pogledati prethodni zadatak: $s = l_1 + l_2 = 360 \text{ m}$; $t = \frac{s}{v} = 24 \text{ s}$; 3. $t_0 = 4 \text{ s}$, $t = 5 \text{ s}$, $s_1 = v_1(t_0 + t)$, $s_2 = v_2 \cdot t$. Do trenutka susreta oba vozila pređu put iste dužine u odnosu na nepokretnog posmatrača, tj. $s_1 = s_2$, odakle nalazimo da je $v_2 = 18 \text{ m/s}$ ili $64,8 \text{ km/h}$; 4. $v_r = v_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = v_r - v_1$; $v_r = \frac{l}{t}$; $v_2 = \frac{l}{t} - v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 5. $t = \frac{d}{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 300 \text{ s}$; $s_{BC} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 300 \text{ s} = 450 \text{ m}$; $s_{AC} = \sqrt{d^2 + s_{BC}^2} = 750 \text{ m}$; 6. $v = \sqrt{2as} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $t = 5 \text{ s}$; 7. Do trenutka susreta oba tijela pređu puteve iste dužine za isto vrijeme. Biciklista pređe put $s_B = v_B \cdot t$, a voz pede put $s_V = \frac{at^2}{2}$; $s_B = s_V \Rightarrow v_B \cdot t = \frac{at^2}{2}$, odakle nalazimo da je $t = 20 \text{ s}$; $v_V = a \cdot t = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $s_B = 40 \text{ m}$

8. $v_{sr} = \frac{\frac{s}{2} + \frac{s}{2}}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + \frac{s}{2v_2}} \Rightarrow v_{sr} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 58,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 9. Pogledati „Zadaci za vježbu“ – zadatak 10, $s = 14,5 \text{ m}$; $v_{sr} = \frac{s}{t} = 2,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 10. Pogledati „Zadaci za vježbu“ – zadatak 7, $v_{sr} = 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; 11. a) $s = s_1 + s_2 + s_3 = 58 \text{ km}$; $t = t_1 + t_2 + t_3 = 1,033 \text{ h}$; $v_{sr} = \frac{s}{t} = 56,13 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; b) $v_{sr1} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; c) $v_{sr2} = 46,23 \frac{\text{km}}{\text{h}}$; 12. $\Delta s = s_{(4s)} - s_{(3s)}$; $a = 2,28 \text{ m/s}^2$

13.

a)

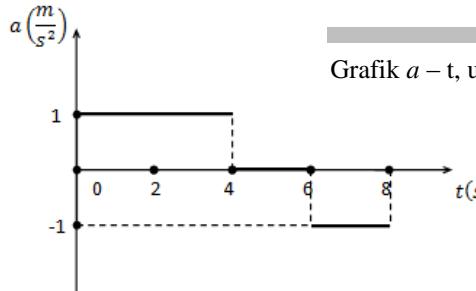
t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7
a(m/s ²)	2	2	2	2	2	0	0	0
v(m/s)	0	2	4	6	8	8	8	8
s(m)	0	1	4	9	16	16+8	16+16	16+24



b) Nakon $t=3,5$ s kretanja $s = \frac{at^2}{2} = \frac{5 \cdot (3,5)^2}{2} = 12,25$ m; c) $v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{5}{2} = 2,5$ s; Nakon $t=2,5$ s kretanja brzina iznosi 5 m/s.; d) $\Delta s = s_4 - s_3 = (16 - 9) = 7$ m

14. a) Automobil je imao početnu brzinu $v_0 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. U intervalu **0 do 40 s** kretao se jednakom usporeno do brzine $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. U intervalu od **40 s do 160 s** kretao se ravnomjerno brzinom $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. U intervalu od **160 s do 240 s** kretao se jednakom ubrzano do brzine $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; b) Pošto je ubrzanje $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, to je: u intervalu od **0 do 40 s** ubrzanje $a_1 = \frac{2-6}{40} = -0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, u intervalu od **40 s do 160 s** $a_2 = 0$, u intervalu od **160 s do 240 s** $a_3 = \frac{10-2}{80} = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; c) Ukupan pređeni put za **240 s**: $s = s_1 + s_2 + s_3$, gdje je $s_1 = 2 \cdot 40 \text{ m} + \frac{(6-2) \cdot 40}{2} \text{ m} = 160 \text{ m}$, $s_2 = 120 \cdot 2 \text{ m} = 240 \text{ m}$, $s_3 = 2 \cdot 80 + \frac{(10-2) \cdot 80}{2} \text{ m} = 480 \text{ m}$, pa je $s = (160 + 240 + 480) \text{ m} = 880 \text{ m}$; d) Srednja putna brzina $v = \frac{s}{t} = \frac{880}{240} = 3,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; e) Pošto automobil nije mijenjao smijer kretanja (brzina automobila je pozitivna – uvijek istog smijera), intenzitet pomaka i put su jednaki, pa su jednaki intenzitet srednje brzine i srednja putna brzina.

15. a) $\Delta t_1 = 4$ s, jednoliko ubrzano; $\Delta t_2 = 2$ s, jednoliko; $\Delta t_3 = 2$ s, jednoliko usporeno; b) $a_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $a_2 = 0$; $a_3 = -1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; c) $s = s_1 + s_2 + s_3 = 22$ m; d) $v_{sr} = \frac{s}{t} = 2,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$



Grafik $a - t$, uz zadatak 15.

2. Osnove dinamike

Pregled najvažnijih formula

Količina kretanja (impuls) tijela je: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$, $p = m \cdot v$

Jedinica za impuls tijela u SI je $\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{Ns}$.

- Prvi Njutnov zakon: $m \cdot v = \text{const.}$ za $F = 0$
- Drugi Njutnov zakon:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}, \quad F = \frac{\Delta p}{\Delta t}; \text{ odnosno:}$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad F = m \cdot a$$

- Treći Njutnov zakon:

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_R, \quad F_A = F_R$$

- Za izolovan sistem kojeg čine dva tijela zakon održanja količine kretanja ima ovaj oblik:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

gdje je $m_1 v_1 + m_2 v_2$ količina kretanja (impuls) sistema prije međudjelovanja, a $m_1 v_1' + m_2 v_2'$ količina kretanja (impuls) sistema poslije međudjelovanja.

- Njutnov zakon opće gravitacije:

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad \gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \text{ - univerzalna gravitaciona konstanta}$$

- Sila Zemljine teže:

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}, \quad F = m \cdot g, \quad \text{gdje je}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ - ubrzanje Zemljine teže.}$$

- Težina tijela:

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g}, \quad G = m \cdot g$$

- Slobodan pad je, po veličini brzine i obliku putanje, jednakoubrzano pravolinijsko kretanje bez početne brzine po vertikalnoj putanji naniže, kod kojeg je $a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a $s = h$:

$$v = g \cdot t, \quad v^2 = 2gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}, \quad h = \frac{gt^2}{2}$$

- Hitac uvis:

$$v = v_0 - gt, \quad v^2 = v_0^2 - 2gh, \quad h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

- Hitac naniže:

$$v = v_0 + gt, \quad v^2 = v_0^2 + 2hg, \quad h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

Zadaci za vježbu:
Primjena 2. Njutnovog zakona

1. Sila stalne jačine $F = 10 \text{ N}$ saopšti nekom tijelu ubrzanje $a = 2 \text{ m/s}^2$. Kolika je masa tog tijela? Koliku brzinu dostigne i koliki put pređe tijelo nakon 10 s kretanja? Prije djelovanja sile tijelo je mirovalo.

Rješenje:

$$F = 10 \text{ N}$$

$$F = m \cdot a \Rightarrow m = \frac{F}{a} = 5 \text{ kg}$$

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = a \cdot t = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s}, v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0 = 0$$

$$\underline{t = 10 \text{ s}}$$

$$m = ?$$

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (10 \text{ s})^2}{2}$$

$$v = ?, s = ?$$

$$s = ?$$

2. Automobil mase 1 t zaustavi se pri kočenju za 5 s, prešavši pri tome rastojanje od 25 m. Odredi:

- a) brzinu automobila prije nego što je počeo kočiti, b) silu kočenja.

Rješenje:

$$m = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$$

a) Kretanje je jednakousporeno, pa važe ove formule: $v^2 = v_0^2 - 2as$,

$$t = 5 \text{ s}$$

$$v = v_0 - at \quad \text{i} \quad s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

$$v = 0$$

Obzirom da se tijelo zaustavilo, njegova krajnja brzina je $v = 0$, pa

$$\underline{s = 25 \text{ m}}$$

$$\text{formule dobijaju ovaj oblik: } v_0^2 = 2as \quad \text{i} \quad v_0 = at \Rightarrow a = \frac{v_0}{t}$$

$$v_0 = ?$$

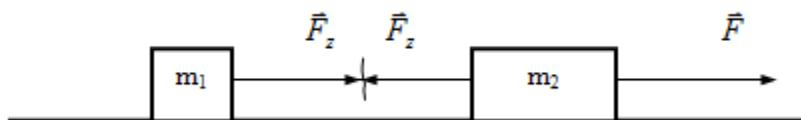
$$F = ?$$

$$v_0^2 = 2 \cdot \frac{v_0}{t} \cdot s / : v_0; \quad v_0 = \frac{2s}{t} = \frac{2 \cdot 25 \text{ m}}{5 \text{ s}}; v_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{b)} a = \frac{v_0}{t} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ s}}; a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; F = m \cdot a = 1000 \text{ kg} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; F = 2000 \text{ N}$$

3. Dva tijela mase $m_1 = 50 \text{ g}$ i $m_2 = 100 \text{ g}$, povezana koncem, leže na glatkoj horizontalnoj površini.

- a) Koliko je ubrzanje sistema ako na tijelo m_2 djeluje horizontalna sila $F = 1 \text{ N}$?
 b) Kolika je sila zatezanja konca?
 c) Ako konac može izdržati maksimalnu silu zatezanja od 5 N, pri kojoj će maksimalnoj vučnoj sili konac pući?





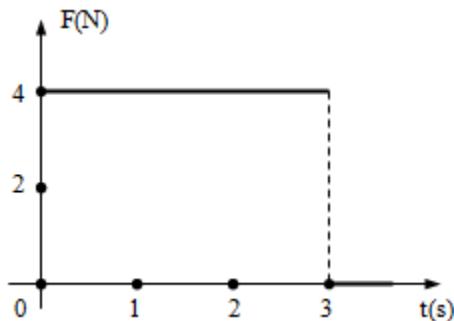
Odavde izračunavamo traženo ubrzanje sistema:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}; a = 0,3924 \frac{m}{s^2}$$

Izračunato ubrzanje uvrstimo u bilo koju od jednačina (1) ili (2) i dobićemo силу zatezanja konca:
Npr. iz (2) $\Rightarrow F_z = m_2(a + g)$; $F_z = 2,45N$

5. Na tijelo, mase $m = 8\text{ kg}$, djeluje sila čiji je grafik djelovanja prikazan na slici.

- a) Koliku brzinu postigne tijelo tokom djelovanja sile?
- b) Nacrtati odgovarajući grafik brzine



Važno je uočiti da nakon 3 sekunde na tijelo više ne djeluje sila, pa se ono nastavlja kretati po inerciji brzinom koju je steklo tokom jednakoubrzanog kretanja pod djelovanjem sile ($v = 1,5 \text{ m/s}$), tako da grafik brzine izgleda kao na slici.

Rješenje:

$$F = 4N$$

$$t = 3s$$

$$\underline{m = 8\text{ kg}}$$

$$v = \frac{F \cdot t}{m} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

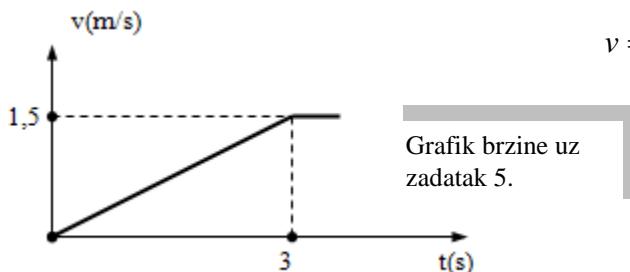
$$v = ?$$

Napomena

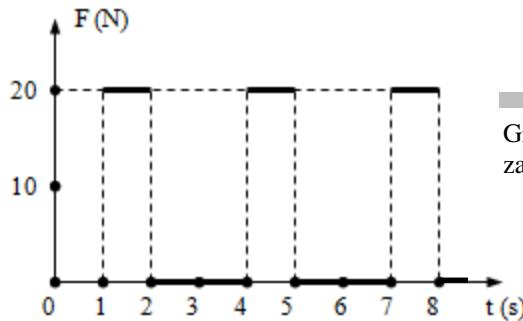
Zadatak se mogao riješiti i ovako:

Pošto je kretanje pod djelovanjem sile jednakoubrzano, moglo se prvo izračunati ubrzanje tijela: $a = \frac{F}{m} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, a zatim i vrijednost brzine:

$$v = a \cdot t = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3s = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



6. Na neko tijelo, mase $m = 10\text{ kg}$, djeluje sila čiji je grafik djelovanja prikazan na slici. Djelovanje sile je kratkotrajno, ali se ponavlja poslije svakog vremenskog intervala od 2 sekunde. Prije djelovanja sile tijelo je mirovalo.
- a) Opisati kretanje tijela pod djelovanjem ovakve (impulsne) sile.
 - b) Koliku brzinu dostigne tijelo nakon tri uzastopna djelovanja sile?
 - c) Nacrtati odgovarajući grafik brzine.



Grafik sile uz zadatak 6.

Rješenje:

- a) Tijelo se tokom svakog djelovanja sile kreće stalnim ubrzanjem

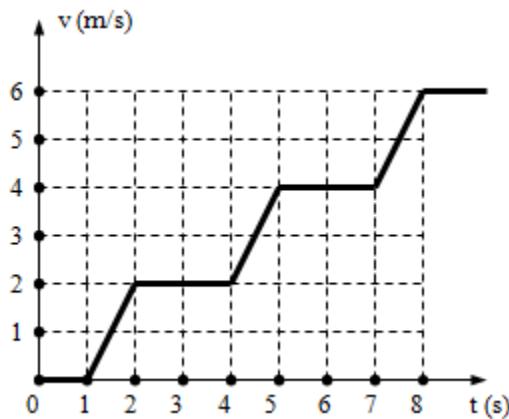
$$a = \frac{F}{m} = \frac{20N}{10kg} = 2 \frac{m}{s^2}. \text{ U vremenskim intervalima kada sila ne djeluje, tijelo se}$$

kreće jednoliko, i to onom brzinom koju je dostiglo tokom prethodnog djelovanja sile.

b) $v_1 = a \cdot t_1 = 2 \frac{m}{s^2} \cdot 1s; v_1 = 2 \frac{m}{s}; v_2 = v_1 + a \cdot t_2; v_2 = 4 \frac{m}{s}$

$$v_3 = v_2 + a \cdot t_3; v_3 = 6 \frac{m}{s}$$

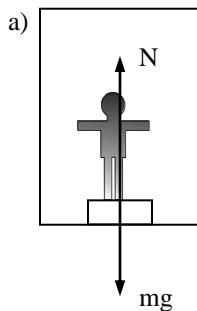
- c) Grafik brzine



7. Čovjek mase 80 kg stoji u liftu na vagi. Odredi pokazivanje kazaljke vase: a) ako se lift kreće naviše stalnom brzinom, b) ako se lift kreće naviše stalnim ubrzanjem $a = 2 \text{ m/s}^2$, c) ako se lift kreće naniže stalnim ubrzanjem $a = 1 \text{ m/s}^2$, d) ako se kreće naniže stalnim ubrzanjem $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Rješenje:

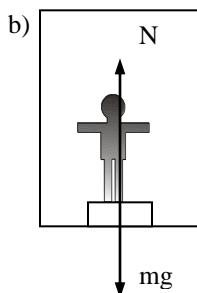
Kada na tijelo djeluje više sila, 2. Njutnov zakon (glavna jednačina kretanja) ima oblik $m \cdot a = F_R$, gdje je F_R rezultanta sila koje djeluju na tijelo.



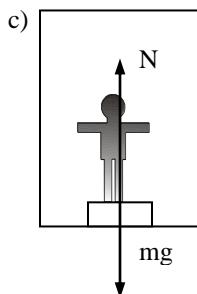
Tijelo se kreće u naznačenom smjeru stalnom brzinom tako da je $a = 0$. Na tijelo djeluju sile mg i reakcija podloge N . Glavna jednačina kretanja ima ovaj oblik: $0 = N - mg$

$$\text{odakle slijedi da je: } N = mg = 80\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 784,8\text{ N}$$

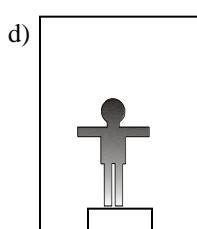
Sila kojom čovjek pritišće podlogu (vagu) po iznosu je jednaka reakciji podloge N .



Tijelo se kreće u naznačenom smjeru stalnim ubrzanjem $a = 2 \text{ m/s}^2$. Glavna jednačina kretanja ima ovaj oblik: $ma = N - mg$ odakle slijedi da je: $N = mg + ma = 944,8\text{ N}$



Tijelo se kreće u naznačenom smjeru stalnim ubrzanjem $a = 1 \text{ m/s}^2$. Glavna jednačina kretanja ima ovaj oblik: $ma = mg - N$ odakle slijedi da je: $N = mg - ma = 704,8\text{ N}$



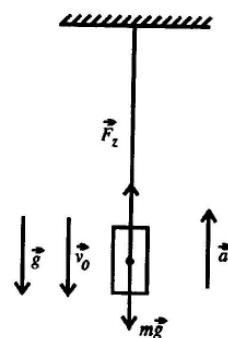
Tijelo se kreće u naznačenom smjeru stalnim ubrzanjem $a = g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Glavna jednačina kretanja ima ovaj oblik: $ma = mg - N$, odakle slijedi da je: $N = mg - ma = 0$
Čovjek ne dodiruje podlogu (vagu), tj. nalazi se u beztežinskom stanju.

8. Masa lifta i tereta u njemu iznosi $m = 4 \text{ t}$. On se spušta konstantnom brzinom $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Koliki je najkraći put na kojem se lift smije zaustaviti, ako sajla kojom je on vezan može izdržati maksimalnu silu intenziteta $F_{\max} = 80 \text{ kN}$?

Rješenje:

$$ma = F_z - mg$$

$$v^2 = v_0^2 - 2as \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2s} \text{ jer je } v = 0$$





$$m \cdot \frac{v_0^2}{2s} = F_Z - mg \Rightarrow s = \frac{mv_0^2}{2(F_Z - mg)}, \text{ odnosno}$$

$$s_{min} = \frac{mv_0^2}{2(F_{Zmax} - mg)} = 0,8 \text{ m}$$

Primjena zakona o održanju količine kretanja

9. Dječak mase 55 kg trči brzinom 3 m/s i stigne kolica mase 75 kg koja se kreću brzinom 5,4 km/h i uskoči u njih. a) Kolikom se brzinom kreću kolica sa dječakom u njima? b) Kolikom bi se brzinom kretao taj sistem kad bi dječak trčao u susret kolicima pa u njih uskočio?

Rješenje:

$$m_1 = 55 \text{ kg}$$

$$v_1 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_2 = 75 \text{ kg}$$

$$v_2 = 5,4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = ?$$

Prema zakonu o održanju impulsa, impuls sistema prije međudjelovanja mora biti jednak impulsu sistema poslije međudjelovanja: $p = p'$. Kad se dječak i kolica kreću u istom smjeru njihovi pojedini impulsi se sabiraju, a kad se kreću u suprotnim smjerovima, oni se oduzimaju.
 a) Impuls sistema prije međudjelovanja je: $p = m_1 v_1 + m_2 v_2$, a poslije međudjelovanja je: $p' = (m_1 + m_2) \cdot v$, jer dječak i kolica, praktično, čine «jedno tijelo» mase $m = m_1 + m_2$ koje se kreće traženom brzinom v .

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}; v = 2,13 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) dječak i kolica se kreću u suprotnim smjerovima:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}; v = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

10. Na kolica mase 500 g, koja se kreću po glatkoj horizontalnoj podlozi stalnom brzinom $v_1 = 2,5 \text{ m/s}$, stavi se teg mase 100 g. Kolikom brzinom će se kretati kolica u trenutku stavljanja tega?



Rješenje:

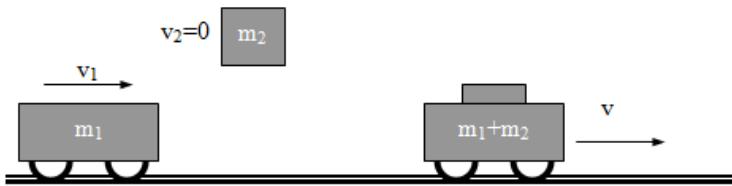
$$m_1 = 500 \text{ g}$$

$$v_1 = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_2 = 100 \text{ g}$$

$$\underline{v_2 = 0}$$

$$v = ?$$



Količina kretanja prije međudjelovanja: $p = m_1 v_1 + \cancel{m_2 v_2}^0$; jer je $v_2 = 0$, tj. $p = m_1 v_1$
Poslije međudjelovanja: $p' = v \cdot (m_1 + m_2)$

$$m_1 v_1 = v \cdot (m_1 + m_2) \Rightarrow v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}; v = 2,08 \approx 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

11. Raketa mase 5 kg letjela je brzinom 4 km/s i raspala se na dva dijela. Dio rakete, mase 1,6 t, poslije raspadanja je nastavio kretanje u istom smjeru, brzinom 9 km/s. Odredi brzinu i smjer kretanja drugog dijela rakete.

Rješenje:

$$M = 2t$$

$$v = 4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$m_1 = 1,6t$$

$$v_1 = 9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_2 = ?$$

Količina kretanja sistema prije međudjelovanja: $p = M \cdot v$

Količina kretanja sistema poslije međudjelovanja: $p' = m_1 v_1 + m_2 v_2$ uz pretpostavku da se oba dijela kreću u istom smjeru. $m_2 = M - m_1 = 0,4t$

$$M \cdot v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{M \cdot v - m_1 \cdot v_1}{m_2}; v_2 = -16 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Znak «-» govori da je pretpostavka da se oba dijela rakete kreću u istom smjeru pogrešna, tj. preostali dio rakete mase m_2 se kreće u suprotnom smjeru.

12. Dva čamca se kreću na mirnoj vodi u susret jedan drugom istom brzinom $v_1 = 0,6 \text{ m/s}$ (u odnosu na obalu). Kada čamci budu jedan pored drugog iz prvog čamca se prebaci u drugi teret mase 60 kg. Poslije toga drugi čamac se nastavi kretati u istom smjeru brzinom $v_2 = 0,4 \text{ m/s}$. Odredi masu drugog čamca. Otpor vode zanemariti. (*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Mirićina 2007.*)

Rješenje:

Količina kretanja čamaca prije izbacivanja tereta:

$$p_1 = m_1 v_1 - m_2 v_1$$

gdje je m_1 masa prvog čamca **sa teretom** (jer je to u ovom slučaju „jedno tijelo“ do izbacivanja tereta), a m_2 masa drugog čamca (to je drugo tijelo). Znak minus je zbog toga što se čamci kreću u suprotnim smjerovima.

Količina kretanja čamaca nakon izbacivanja tereta iz jednog čamca u drugi:



$$p_2 = (m_1 - 60 \text{ kg}) \cdot v_1 - (m_2 + 60 \text{ kg}) \cdot v_2$$

$$p_1 = p_2$$

$$m_1 v_1 - m_2 v_1 = (m_1 - 60 \text{ kg}) \cdot v_1 - (m_2 + 60 \text{ kg}) \cdot v_2$$

Nakon sređivanja

$$m_2(v_1 - v_2) = 60 \text{ kg}(v_1 + v_2) \Rightarrow m_2 = \frac{60 \text{ kg}(v_1 + v_2)}{(v_1 - v_2)} = 300 \text{ kg}$$

13. Kolica mase 120 kg, i u njima čovjek mase 80 kg, kreću se brzinom 4 m/s. U jednom trenutku čovjek iskače iz kolica brzinom 2 m/s u odnosu na tlo u smjeru suprotnom od smjera kretanja kolica. Kolikom brzinom će se nastaviti kretati kolica?

Rješenje:

$$m_1 = 120 \text{ kg}$$

$$p = (m_1 + m_2) \cdot v$$

$$m_2 = 80 \text{ kg}$$

$$p' = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 2 \text{ m/s}$$

$$v_1 = ?$$

$$p = p'$$

$$(m_1 + m_2) \cdot v = m_1 v_1 - m_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot v + m_2 v_2}{m_1}$$

$$v_2 = 8 \frac{m}{s}$$

Njutnov zakon opće gravitacije

14. Izračunaj silu kojom se međusobno privlače dva automobila čije su mase po 1 t, a udaljenost centara masa 2 m. Koliki bi se teret mogao podići tom silom?

Rješenje:

$$m_1 = m_2 = m = 1t = 10^3 \text{ kg}$$

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m^2}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{(10^3 \text{ kg})^2}{(2m)^2}$$

$$r = 2m$$

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$F_g = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{10^6 kg^2}{4m^2} = 1,67 \cdot 10^{-5} N$$

$$F_g = ?$$

$$m = \frac{F_g}{g} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

15. Kolikom silom djeluje Zemlja na čovjeka mase 75 kg koji se nalazi na njenoj površini?

Izračunaj: a) pomoću obrasca za silu teže ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$); b) pomoću obrasca za gravitacionu silu ($R_Z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $M_Z = 5,94 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$).

Rješenje:

$$a) F_g = m \cdot g = 75 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 735,75 \text{ N}$$

$$b) F_g = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{(5,94 \cdot 75) \cdot 10^{24} \text{ kg}}{40,58 \cdot 10^{12} \text{ m}^2} = 732,25 \text{ N}$$

Slobodan pad, hitac uvis i naniže

16. Tijelo slobodna pada sa visine $h = 45 \text{ m}$. Kolikom će brzinom udariti o tlo, i koliko će dugo padati ($g = 10 \text{ m/s}^2$)?

Rješenje: $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 45 \text{ m}}$
 $h = 45 \text{ m}$

$$\frac{g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{v = ?} \quad v = \sqrt{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 45 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3 \text{ s} \quad \text{ili}$$
 $t = ?$

$$v = g \cdot t \Rightarrow t = \frac{v}{g} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3 \text{ s}$$

17. Koliki put pređe tijelo u osmoj sekundi slobodnog pada?

Rješenje: $t_1 = 7 \text{ s}$ $h_1 = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (7 \text{ s})^2}{2} = 240,35 \text{ m}$
 $t_2 = 8 \text{ s}$ $h_2 = \frac{gt_2^2}{2} = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (8 \text{ s})^2}{2} = 313,92 \text{ m};$
 $\Delta h = ?$ $\Delta h = h_2 - h_1 = 73,57 \text{ m}$

18. Tijelo slobodno pada sa visine $h = 50 \text{ m}$. Koliki put pređe u posljednjoj sekundi kretanja ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)?



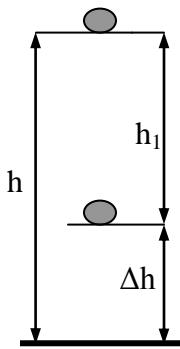
Rješenje:

$$h = 50m$$

$$\Delta t = 1s$$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2}$$

$$\Delta h = ?$$



$$\Delta h = h - h_1$$

$$h = \frac{gt^2}{2}; h_1 = \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2; t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Delta h = h - \frac{1}{2}g \cdot \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \Delta t \right)^2$$

$$\Delta h = 50m - 4,905 \frac{m}{s^2} \cdot 4,808s^2 = 26,42m$$

19. Dva tijela se izbacu istovremeno jedno drugom u susret jednakim početnim brzinama $v_0 = 40 \text{ m/s}$. Prvo tijelo se izbaci vertikalno uvis sa površine Zemlje, a drugo vertikalno naniže sa visine koja je jednaka maksimalnoj visini penjanja koju dostigne prvo tijelo. Nakon koliko vremena i na kojoj visini iznad tla će se susresti tijela ($g = 10 \text{ m/s}^2$)? Otpor vazduha se zanemaruje.

Rješenje:

$$v_0 = 40 \frac{m}{s}$$

Maksimalnu visinu penjanja računamo na sljedeći način:

$$v^2 = v_0^2 - 2gh_{\max}. \text{ Kako je u najvišoj tački putanje } v = 0, \text{ jednačina dobija}$$

$$\frac{h = h_{\max}}{t = ?}$$

$$\text{ovaj oblik: } v_0^2 = 2gh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}, \quad h_{\max} = 80m$$

$$h_1 = ?$$

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$$

$$h_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Sabiranjem ovih jednačina dobije se: $h + h_1 = 2v_0 t$.

$$h + h_1 = h_{\max} = 80m,$$

$$t = \frac{h_{\max}}{2v_0} = 1s$$

$$h_1 = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 40 \frac{m}{s} \cdot 1s - \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot 1s^2}{2} = 35m$$

20. Tijelo je u posljednjoj sekundi slobodnog pada prešlo put od $54,5 \text{ m}$. Kolika je visina sa koje je tijelo palo ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?



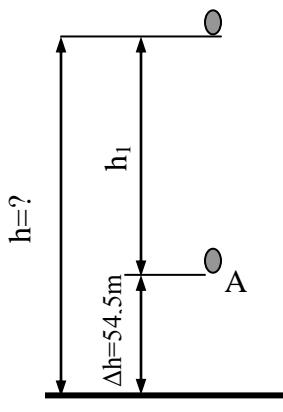
Rješenje:

$$\Delta h = 54,5 \text{ m}$$

$$\Delta t = 1 \text{ s}$$

$$g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h = ?$$



Kretanje tijela ćemo podijeliti u dva dijela: kretanje do tačke A ćemo posmatrati kao slobodan pad, a od tačke A do tla, kao hitac naniže. Brzina koju tijelo postigne u tački A (v_0) je krajnja brzina za slobodan pad do te tačke, a to je ujedno i početna brzina za hitac od tačke A do tla.

$$\Delta h = v_0 \cdot \Delta t + \frac{g \cdot \Delta t^2}{2} \Rightarrow v_0 = 49,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0^2 = 2gh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{v_0^2}{2g} = 125,5 \text{ m}$$

$$h = h_1 + h = 125,5 \text{ m} + 54,5 \text{ m} = 180 \text{ m}$$

21. Kolika je visina sa koje je palo tijelo, ako je njegova brzina pri udaru o tlo iznosila $v = 30 \text{ m/s}$ ($g = 10 \text{ m/s}^2$)? Koliko dugo je tijelo padalo? Otpor vazduha se zanemaruje.

Rješenje:

$$v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h = ?$$

$$t = ?$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(30 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 45 \text{ m}$$

$$t = \frac{v}{g} = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3 \text{ s}$$

22. Dva tijela slobodno padaju sa različitih visina i udaraju o tlo istovremeno. Vrijeme padanja prvog tijela je 2 s, a drugog 1 s. Na kojoj visini se nalazilo prvo tijelo kada je drugo počelo padati?

Rješenje:

$$t_1 = 2 \text{ s}$$

$$t_1 = 1 \text{ s}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h = ?$$

Vrijeme padanja drugog tijela je 1 s, a prvog 2 s. Naš problem se svodi na to da odredimo koliki je put prešlo tijelo 1 tokom druge (posljednje) sekunde slobodnog pada:

$$h = \frac{g}{2} \left(t_{(2s)}^2 - t_{(1s)}^2 \right) = \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \left(4s^2 - 1s^2 \right); h = 14,715 \text{ m}$$

23. Tijelo se sa površine zemlje izbaci vertikalno uvis početnom brzinom $v_0 = 40 \text{ m/s}$. Nakon koliko vremena će tijelo doći u početnu tačku? Otpor vazduha se zanemaruje (uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$).



Rješenje:

$$v_0 = 40 \frac{m}{s}$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$t = ?$$

Kod hica uvis važi princip da je vrijeme penjanja do najviše tačke jednako vremenu slobodnog pada od najviše tačke do tla: $t_{\text{penjanja}} = t_{\text{slobodnog pada}}$.

Kad to znamo, onda ukupno vrijeme, koje je potrebno da tijelo ode u najvišu tačku i vrati se, možemo računati kao dvostruku vrijednost

$$\text{vremena slobodnog pada od najviše tačke do tla: } t = 2 \frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{40}{10} \frac{m}{s^2} = 8s$$

Zadatak smo mogli riješiti i tako da posebno računamo vrijeme penjanja do najviše tačke, te vrijeme slobodnog pada od najviše tačke do tla, pa da onda te dvije vrijednosti saberemo:

- vrijeme penjanja: $v = v_0 - g \cdot t_1$; u najvišoj tački putanje $v = 0$; $v_0 = g \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{g} = 4s$
- vrijeme slobodnog pada: $t_2 = \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$; $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 80m$; $t_2 = 4s$
- $t = t_1 + t_2 = 8s$

24. Sa vrha solitera visokog 30 metara ispalili se vertikalno uvis tijelo, početnom brzinom $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Nakon koliko vremena će tijelo pasti na zemlju? Otpor vazduha se zanemaruje, a za ubrzanje slobodnog pada uzeti vrijednost $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rješenje:

$$h_1 = 30m$$

$$v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$t = ?$$

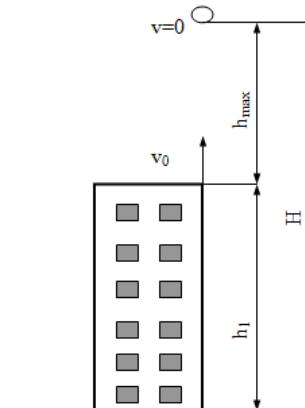
$$H = h_1 + h_{\max}$$

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 20m$$

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (30+20)m}{10 \frac{m}{s^2}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{100}{10}} s^2$$

$$t = 3,16s$$



25. Kolika je visina zgrade ako sa njenog vrha tijelo, bačeno vertikalno naniže brzinom $v_0 = 10 \text{ m/s}$, padne na tlo za 1 sekundu? Otpor vazduha se zanemaruje ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

Rješenje:

$$v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

$$t = 1s$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$h = ?$$

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 10 \frac{m}{s} \cdot 1s + \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot 1s^2}{2}$$

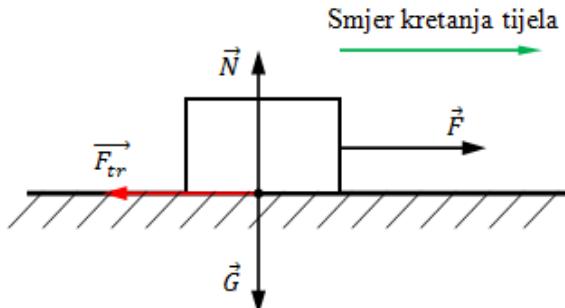
$$h = 15m$$



Trenje klizanja, sila otpora sredine

Pregled najvažnijih formula

Sila trenja se javlja između tijela i podloge po kojoj se tijelo kreće, usmjereni je suprotno od smjera kretanja tijela i koči (usporava) kretanje tijela.



Sila trenja klizanja je jednaka proizvodu koeficijenta trenja i normalne reakcije podloge

$$F_{tr} = \mu \cdot N.$$

Ako se tijelo nalazi na horizontalnoj podlozi i ako na podlogu djeluje samo svojom težinom, tada je $N = G$, pa možemo pisati da je

$$F_{tr} = \mu \cdot G,$$

odnosno

$$F_{tr} = \mu \cdot m \cdot g.$$

Probleme vezane za kretanje tijela uz trenje općenito rješavamo koristeći Drugi Njutnov zakon (glavnu jednačinu kretanja)

$$m \cdot a = F_R.$$

Ovdje je rezultujuća sila koja pomjera tijelo po podlozi

$$F_R = F - F_{tr},$$

pa 2. Njutnov zakon ima oblik

$$m \cdot a = F - F_{tr}.$$

Razlikujemo tri karakteristična slučaja kretanja uz trenje:

1. Tijelo se kreće stalnom brzinom ($v = \text{konst.}$ $a = 0$)

Kako je u ovom slučaju $a = 0$, tako je i proizvod $m \cdot a = 0$, pa imamo da je $F - F_{tr} = 0$, odakle proizilazi da je $F = F_{tr}$.

2. Tijelo se kreće stalnim ubrzanjem ($a = \text{konst.}$)

$$m \cdot a = F - F_{tr}$$

3. Tijelu je saopštena početna brzina, a onda se ono nastavlja kretati jednakousporeno jer na to tijelo djeluje samo sila trenja

U ovom slučaju je $F = 0$, tijelo se ravnomjerno usporava, pa a ima negativnu vrijednost, tako da možemo pisati

$$ma = F_{tr}$$

$$ma = \mu mg \Rightarrow a = \mu g$$

Zadaci za vježbu

26. Sanduk, mase 2 kg, leži na horizontalnoj podlozi. Koeficijent trenja između sanduka i podloge je 0,2. Kolikom horizontalnom silom moramo djelovati na sanduk da bi se on kretao:

- a) stalnom brzinom,
- b) stalnim ubrzanjem $a = 0,5 \text{ m/s}^2$?

Rješenje:

- a) Radi se o slučaju kretanja pod 1).

$$m \cdot a = F - F_{tr}$$

Kako se tijelo kreće stalnom brzinom ($a = 0$), tada je

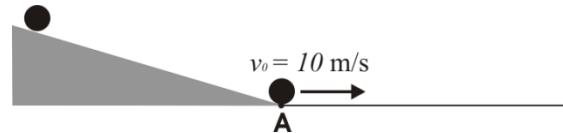
$$F - F_{tr} = 0 \Rightarrow F = F_{tr}$$

$$F = \mu mg = 3,924 \text{ N}$$

- b) $m \cdot a = F - F_{tr} \Rightarrow F = ma + F_{tr}$

$$F = ma + \mu mg = 4,924 \text{ N}$$

27. Kuglica se pusti niz kosinu tako da u njenom podnožju (tačka A) stekne brzinu od 10 m/s, te se nastavi kretati po horizontalnoj putanji. Na kojem rastojanju od podnožja padine (tačke A) će se zaustaviti kuglica, ako je koeficijent trenja između kuglice i horizontalne podloge $\mu = 0,5$? (Opšinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, TK 2012.)



Rješenje:

$$\begin{aligned} v_0 &= 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v &= 0 \\ \mu &= 0,5 \\ s &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2as; v = 0 \\ v_0^2 - 2as &= 0 \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2a} \end{aligned}$$

Nakon što je tijelu saopštена početna brzina, na tijelo ne djeluju nikakve sile osim sile trenja, pa glavna jednačina kretanja ima oblik:

$$ma = \mu mg /: m$$

$$a = \mu g$$

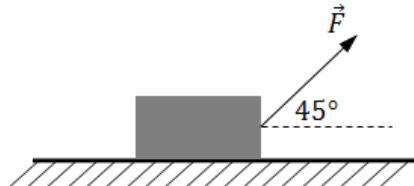
$$a = 0,5 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = 4,905 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{v_0^2}{2a} \\ s &= \frac{\left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 4,905 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \end{aligned}$$

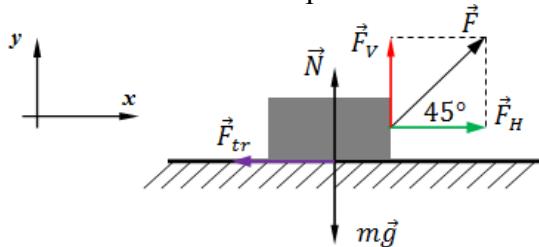
$$\begin{aligned} s &= \frac{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ s &= 10,19 \text{ m} \end{aligned}$$

28. Na tijelo mase 1 kg počne djelovati sila $F = 1,6 \text{ N}$ pod ugлом 45° u odnosu na horizontalnu podlogu, kao na slici. Pod djelovanjem ove sile tijelo se keće jednakoubrzano i za 2 s pređe put od 3 m, pri čemu mu se brzina ravnomjerno poveća dva puta u odnosu na početnu brzinu. Koliki je koeficijent trenja između tijela i podloge?



Rješenje:

Silu F rastavimo na dvije međusobno okomite komponente.



Ove komponente su međusobno jednake i iznose

$$F_H = F_V = F \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,13 \text{ N.}$$

Glavna jednačina kretanja po x osi ima oblik:

$$m \cdot a = F_H - F_{tr}$$

Odavde slijedi da je

$$F_{tr} = F_H - m \cdot a \dots \dots \dots (1)$$

Kako nema kretanja po vertikalnom pravcu (tijelo se kreće samo duž ose x), glavna jednačina kretanja po y osi ima oblik:

$$0 = N + F_V - mg$$

Odavde proizilazi da je

$$N = mg - F_V \dots \dots \dots (2)$$

Sila trenja je

$$F_{tr} = \mu \cdot N \dots \dots \dots (3)$$

Nađimo ubrzanje tijela.

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Kako je $v = 2v_0$, možemo pisati

$$\begin{aligned} 2v_0 - v_0 &= a \cdot t \Rightarrow v_0 = a \cdot t \\ v^2 &= v_0^2 + 2as \\ 4v_0^2 - v_0^2 &= 2as \\ 3v_0^2 &= 2as \\ 3a^2 t^2 &= 2as \Rightarrow a = \frac{2s}{3t^2} \\ a &= 0,5 \frac{m}{s^2} \end{aligned}$$

Na osnovu jednačina (1), (2) i (3) slijedi

$$\begin{aligned} F_H - m \cdot a &= \mu \cdot (mg - F_V) \Rightarrow \mu = \frac{F_H - m \cdot a}{mg - F_V} \\ \mu &= 0,073 \end{aligned}$$



29. Tijelo mase 3 kg palo je s visine 70 m za 4 s. Odredi srednju silu otpora vazduha.

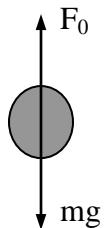
Rješenje:

$$m = 3 \text{ kg}$$

$$h = 70 \text{ m}$$

$$t = 4 \text{ s}$$

$$F_o = ?$$



Ovo nije slobodan pad. Na tijelo, dok pada, djeluju sila Zemljine teže i sila otpora vazduha čiji su smjerovi prikazani na slici:

$$ma = mg - F_0 \Rightarrow F_0 = m(g - a)$$

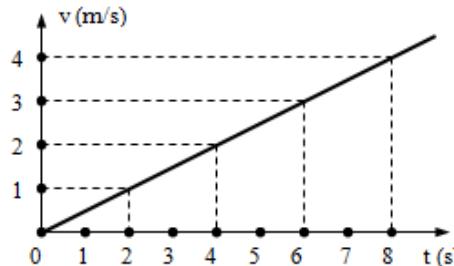
$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = 8,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_0 = 3 \text{ kg} \cdot (9,81 - 8,75) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3,18 \text{ N}$$

Zadaci za samostalan rad

- Automobil mase 0,8 tona kreće se po horizontalnom putu brzinom 18 km/h. Kolikom silom treba da koči motor da bi se automobil zaustavio na dužini puta od 10 metara?
- Na tijelo mase 5 kg u stanju mirovanja počne da djeluje stalna sila jačine 20 N. Pod djelovanjem te sile tijelo dostigne brzinu 72 km/h. Odredi:
 - promjenu impulsa tijela,
 - vremenski interval u kojem je sila djelovala,
 - put što ga je tijelo prešlo za to vrijeme.

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Gračanica, 1999. godine)
- Automobil mase 950 kg se kretao brzinom 72 km/h, a zatim počeo da koči jednakousporeno tako da se za 5 sekundi zaustavio. Izračunaj: a) silu kočenja, b) pređeni put tokom kočenja.
- Preko žlijeba nepomičnog kotura prebačena je nit. Na jednom kraju niti obješen je teret mase $m_1 = 500 \text{ g}$, a na drugi mase $m_2 = 1 \text{ kg}$. Odredi: a) ubrzanje tijela, b) silu zatezanja niti.
- Crtež prikazuje grafik brzine tijela čija je masa $m = 9 \text{ kg}$. Kolika sila djeluje na tijelo?



- Na klizalištu su dva dječaka zastala praveći odmor. Težine dječaka su 300 N i 400 N. Koliko će ubrzanje dobiti prvi dječak ako odgurne drugog silom od 10 N? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- Kolikom silom dječak mase 40 kg djeluje na pod lifta: a) kad lift miruje, b) kad se lift kreće naviše stalnim ubrzanjem $a = 2 \text{ m/s}^2$?
- Sjedeći u čamcu čovjek konopom privlači drugi čamac za vrijeme od 5 s. Sila vuče je 100 N. Težina prvog čamca je 2800 N, a drugog 2000 N. Koliki će put preći oba čamca?

9. Čovjek mase 70 kg iskače na obalu brzinom od 3 m/s iz čamca mase 210 kg. Kojom brzinom će se pokrenuti čamac u suprotnom smjeru i koliki će put preći za 3 sekunde, ako se uzme da je kretanje čamca ravnomjerno pravolinjsko (otpor vode se zanemaruje)?
 10. Kolica mase 120 kg i čovjek u njima mase 100 kg kreću se brzinom od 4 m/s. Kolikom brzinom će se nastaviti kretati kolica, ako čovjek iskoči iz njih na tlo brzinom od 2 m/s u smjeru suprotnom od smjera kretnja kolica?
 11. U trenutku kad dvostepenska raketa mase 1 tone ima brzinu 171 m/s, od nje se odijeli njezin drugi stepen mase 0,4 tona. Pritom se brzina drugog stepena poveća na 185 m/s. Kolika je sada brzina prvog stepena rakete?
 12. Ledolomac mase 5000 tona kreće se ugašenog motora brzinom 10 m/s i nalijeće na nepomičnu santu leda koju gura dalje ispred sebe brzinom 2 m/s. Kolika je masa sante ako zanemarimo otpor vode?
 13. S koje visine mora padati voda na točak vodenice da bi u trenutku kada udari o točak njezina brzina bila 15 m/s?
 14. Koliko dugo pada tijelo sa stropa sobe visoke 317 cm? Kojom će brzinom tijelo pasti na pod i kolika mu je srednja brzina od stropa do poda?
 15. Koliko rastojanje pređe tijelo u sedmoj sekundi slobodnog padanja? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 16. Sa žlijeba na krovu kuće svakih 0,2 s padne kap vode. Koliko će međusobno biti udaljene prve četiri kapi nakon 2 s pošto je počela padati prva kap?
 17. Ako neka planeta ima dva puta veći radijus od Zemljinog i dva puta veću masu od mase Zemlje.
 - a) koliko se puta ubrzanje slobodnog padanja na površini te planete razlikuje od ubrzanja g slobodnog pada na površini Zemlje,
 - b) za koje vrijeme bi tijelo sa visine 10 m palo na toj planeti i koliko se puta ono razlikuje od pada sa iste visine na Zemlji? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- (Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2000. godine)
18. Nogometaš šutira loptu mase 0,5 kg vertikalno uvis silom od 50 N. Odredi početnu brzinu koju je nogometaš saopštio lopti, ako je djelovanje sile trajalo 0,15 s, i maksimalnu visinu koju će dostići lopta ako se zanemari otpor vazduha. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
 19. Sa visine od 80 m iznad površine Zemlje izbačeno je tijelo uvis početnom brzinom 30 m/s. Za koje će vrijeme tijelo prijeći posljednji dio puta od 45 m prije nego što padne na Zemlju? ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) (Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Travnik, 1996. godine)
 20. Sa vrha solitera počne slobodno padati kamen i tačno u 12 sati prođe pored posmatrača na prozoru, a u 12 sati i 1 s pored drugog posmatrača koji se nalazi 15 m niže. Kolika je visina solitera u odnosu na prvog posmatrača? ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$) (Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Lukavac, 2014. godine)
 21. Dva učenika su za domaću zadaću iz fizike, na temelju eksperimenta koji su izvodili u školi, dobili zadatak nacrtati grafik ovisnosti izduženja opruge o sili. Eksperiment su izvodili s oprugom i drvenim kvadrom dimenzija 10 cm x 8 cm x 5 cm. Jedan učenik je oprugu zakačio za kvadar i njome vukao kvadar po ravnom drvenom stolu stalnom brzinom. Drugi učenik je izmjerio da je dužina opruge dok se kvadar kretao po stolu iznosila 22 cm. Nakon toga su isti kvadar objesili na tu istu oprugu i izmjerili da je dužina opruge 25 cm. Kada su došli kući, shvatili su da su u školi zaboravili zapisati dva podatka: dužinu neopterećene opruge i koeficijent trenja izmedju kvadra i stola. U udžbeniku su pronašli da koeficijent trenja izmedju drveta i drveta iznosi 0,4, ali ipak nisu znali koliko iznosi dužina neopterećene opruge. Učenici su se dosjetili da taj podatak

mogu izračunati iz izmjerenih podataka. Izračunaj dužinu neopterećene opruge i nacrtaj grafik ovisnosti izduženja opruge o sili. Za gustinu drveta od kojeg je građen kvadar uzeti $\rho = 500 \text{ kg/m}^3$ i $g = 10 \text{ m/s}^2$.

22. Kamion sa prikolicom kreće se po horizontalnom i ravnom putu stalnom brzinom od 54 km/h. U jednom trenutku prikolica se otkači, nastavi se kretati u istom smjeru, ali jednakousporeno zbog trenja, te se zaustavi prešavši 225 m. Kamion se nastavio kretati istom brzinom.
- Koliki je koeficijent trenja između točkova prikolice i podlage?
 - Koliko će biti rastojanje između kamiona i prikolice 10 sekundi prije nego se prikolica zaustavi? (*Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike 2012.TK*)
23. Čovjek mase 80 kg iskače brzinom od 3 m/s iz kolica mase 240 kg koja miruju na glatkoj horizontalnoj podlozi. Kojom brzinom će se pokrenuti kolica i u kojem smjeru? Koliki je koeficijent trenja između kolica i podlage, ako se kolica nakon 5 s, od momenta kad je čovjek iskočio iz njih, zaustave? Koliki put će preći kolica do zaustavljanja?
24. Masa tijela rakete je 0,5 kg. Raketa sadrži 600 g goriva. Pri ispaljivanju rakete gorivo je izašlo brzinom 400 m/s. Do koje će se visine popeti raketa ako otpor vazduha smanjuje njen domet pet puta?

Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. $a = 1,25 \text{ m/s}^2$; $F = 1000 \text{ N}$; 2. a) $\Delta p = 1000 \text{ kgm/s}$; b) $a = 4 \text{ m/s}^2$; $t = 5 \text{ s}$; c) $s = 50 \text{ m}$; 3. $F = 3800 \text{ N}$; $s = 50 \text{ m}$; 4. $a = 3,27 \text{ m/s}^2$; $F = 6,54 \text{ N}$; 5. $a = 0,5 \text{ m/s}^2$; $F = 4,5 \text{ N}$;

$$6. m_1 = \frac{G_1}{g}; m_2 = \frac{G_2}{g}; a_1 = \frac{F}{m_1} = 0,33 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; 7.a) N = 392,4 \text{ N}; b) N = 472,4 \text{ N};$$

$$8. \text{Uputstvo: } m_1 = \frac{G_1}{g}; m_2 = \frac{G_2}{g}; a_1 = \frac{F_1}{m_1}; a_2 = \frac{F_2}{m_2}; s_1 = \frac{a_1 t^2}{2} = 6,25 \text{ m}; s_2 = \frac{a_2 t^2}{2} = 4,5 \text{ m}; s = s_1 + s_2 = 10,75 \text{ m}; 9. v = 1 \text{ m/s}; s = 3 \text{ m}; 10. v_2 = 9 \text{ m/s}; 11. v_f = 161,67 \text{ m/s}; 12. m_2 = m - m_1 = 2000 \text{ t};$$

$$13. h = 11,47 \text{ m}; 14. v = 7,89 \text{ m/s}; t = 0,8 \text{ s}; v_{sr} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{v}{2} = 3,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}; 15. \Delta s = s_{(7s)} - s_{(6s)} = 65 \text{ m};$$

$$16. s_1 = \frac{g \cdot (2s)^2}{2} = 19,62 \text{ m}; s_2 = \frac{g \cdot (2s-0,2s)^2}{2} = 15,89 \text{ m}; s_3 = \frac{g \cdot (2s-2 \cdot 0,2s)^2}{2} = 12,56 \text{ m};$$

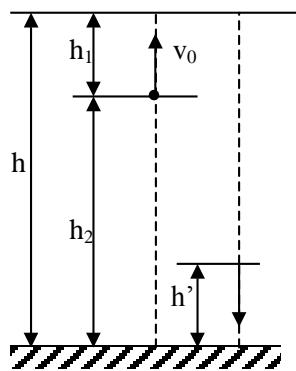
$$s_4 = \frac{g \cdot (2s-3 \cdot 0,2s)^2}{2} = 9,61 \text{ m}; s_1 - s_2 = 3,73 \text{ m}; s_2 - s_3 = 3,33 \text{ m}; s_3 - s_4 = 2,95 \text{ m}; 17. \text{a) Gravitaciona sila kojom Zemlja djeluje na tijelo je } F_1 = \gamma \frac{Mm}{R^2}, \text{ gdje je : M-masa Zemlje, m-masa tijela, R-poluprečnik Zemlje, a gravitaciono ubrzanje } g = \gamma \frac{M}{R^2}. \text{ Gravitaciona sila kojom planeta djeluje na tijelo je } F_2 = \gamma \frac{2Mm}{(2R)^2}, \text{ jer je masa planete } 2M, \text{ a poluprečnik } 2R; F_2 = \gamma \frac{2Mm}{4R^2} = \frac{1}{2} \gamma \frac{Mm}{R^2} = \frac{1}{2} F_1. \text{ Gravitaciono ubrzanje planete je dva puta manje od g: } g_P = \frac{1}{2} \gamma \frac{M}{R^2} = \frac{1}{2} g. \text{ b) Kod slobodnog pada na planeti: } h = \frac{g_P t_P^2}{2} \Rightarrow t_P = \sqrt{\frac{2h}{g_P}} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2} g}} = 2 \text{ s.}$$

Na Zemlji: $h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2} \text{ s. Tijelo će s iste visine padati duže } \sqrt{2} \text{ puta na planeti nego na Zemlji.}$

$$18. v = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}; h_{max} = \frac{(15 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2g} = 11,25 \text{ m};$$



19.



$$h_1 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$$

$$v = 0$$

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$h_1 = \frac{(30)^2}{2 \cdot 9,81}$$

$$h_1 = \frac{900}{19,62}$$

$$h_1 = 45,87 \text{ m}$$

$$h = h_1 + h_2$$

$$h = 45,87 + 80$$

$$h = 125,87 \text{ m}$$

$$h = \frac{gt_1^2}{2}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 125,87}{9,81}}$$

$$t_1 = 5,07 \text{ s}$$

$$h - h' = \frac{gt_2^2}{2}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(h-h')}{g}}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot (125,87 - 45)}{9,81}}$$

$$t_2 = 4,06 \text{ s}$$

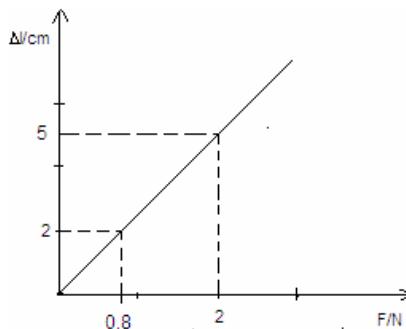
$$t' = t_1 - t_2$$

$$t' = 5,07 - 4,06$$

$$t' = 1,01 \text{ s}$$

20. $h_1 = v_0 t + \frac{gt^2}{2}; v_0^2 = 2gh$; iz ovih jednačina se dobije da je $h = 5,2 \text{ m}$

21. $m = \rho \cdot V = \rho \cdot a \cdot b \cdot c = 0,2 \text{ kg}$; $F_g = mg = 2 \text{ N}$; $F_{tr} = \mu \cdot F_g = 0,8 \text{ N}$; $\Delta l = l_2 - l_1 = 3 \text{ cm}$; $\Delta F = F_g - F_{tr} = 1,2 \text{ N}$; Sila od 1,2 N odgovara izduženju od 3 cm, što znači da sila od 1 N odgovara izduženju od: 2,5 cm ($\frac{1,2 \text{ N}}{3 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ N}}{x} \Rightarrow x = \frac{1 \text{ N} \cdot 3 \text{ cm}}{1,2 \text{ N}} = 2,5 \text{ cm}$). U slučaju kada kvadar visi na opruzi sila je 2 N, pa je izduženje 5 cm. Dužina neopterećene opruge iznosi $25 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 20 \text{ cm}$. Izduženje opruge kada djeluje sila trenja iznosi $22 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$. Grafik ovisnosti izduženja o sili prikazan je na slici ispod



22. $a = \frac{v_0^2}{2s} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$; $\mu = \frac{a}{g} = 0,051$; vrijeme kretanja prikolice do zaustavljanja: $t = \frac{v_0}{a} = 30 \text{ s}$; Traženo vrijeme za određivanje rastojanja Δsje: $t_1 = t - t_2 = 20 \text{ s}$; Za to vrijeme prikolica pređe put:

$$s_1 = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = 200 \text{ m}; \text{ Kamion za isto vrijeme pređe put: } s_2 = v_0 t_1 = 300 \text{ m}; \text{ Traženo rastojanje je:}$$

$$s_2 = v_0 t_1 = 100 \text{ m}; 23. v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}; a = \frac{v_2}{t} = 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}; a = \mu g \Rightarrow \mu = \frac{a}{g} = 0,02; s = \frac{v_2^2}{2a} = 25 \text{ m};$$

$$24. v_1 = 480 \frac{\text{m}}{\text{s}}; h = \frac{h_{max}}{5} = 2348,5 \text{ m}$$

3. Pritisak

Pregled najvažnijih formula

- Pritisak računamo kao količnik sile i površine na koju ta sila djeluje normalno (okomito):

$$p = \frac{F}{S}$$

Mjerna jedinica za pritisak je **paskal**: $1Pa = 1 \frac{N}{m^2}$

Pritisak se često izražava i u **barima**: $1bar = 10^5 Pa$; $1mbar = 10^2 Pa = 1hPa$

- Hidrostatički pritisak zavisi od gustine tečnosti i visine stuba tečnosti:

$$\rho = m \cdot g \cdot h$$

- Paskalov zakon: *spoljašnji pritisak prenosi se kroz tečnosti i gasove i djeluje na sve strane podjednako.*

$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \text{ ili } \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

(tečnosti i gasove jednim imenom zovemo fluidi)

- Arhimedov zakon:

$$G_i = G - F_p, \text{ gdje je:}$$

G – težina tijela

G_i – težina tijela uronjenog u tečnost

F_p – sila potiska

Sila potiska je jednak proizvodu gustine tečnosti (ρ_0), ubrzanja Zemljine teže (g) i zapremine uronjenog tijela (V): $F_p = \rho_0 \cdot g \cdot V$

- Normalni atmosferski pritisak iznosi: $p_0 = 101325 Pa \approx 1,01 \cdot 10^5 Pa$

Zadaci za vježbu

1. Pritisak od 250000 Pa izrazi u: kPa, MPa i barima.

Rješenje:

$$p = 250000 Pa$$

$$p = \frac{250000}{1000} = 250 kPa; \quad p = \frac{250000}{1000000} = 0,25 MPa; \quad p = \frac{250000}{100000} = 2,5 bar$$

2. Metereolozi atmosferski pritisak izražavaju u hektopaskalima ili milibarima, pa tako čujemo da je trenutna vrijednost atmosferskog pritiska u našem mjestu npr. 890 hPa. Izrazi to u Pa, kPa, barima i milibarima.



Rješenje:

$$p = 890 \text{ hPa}$$

$$p = 890 \text{ hPa} = 890 \cdot 100 = 89000 \text{ Pa} = \frac{89000}{1000} = 89 \text{ kPa} = \frac{89000}{100000} = 0,89 \text{ bar} = 890 \text{ mbar}$$

3. Kameni blok, oblika kvadra, ima masu 3 kg i dimenzije: 20 cm x 10 cm x 15 cm. Koliki pritisak vrši na podlogu taj blok kad je postavljen: a) na najveću osnovicu, b) na najmanju osnovicu?

Rješenje:

a)

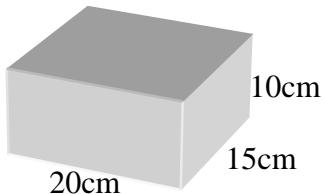
$$m = 3 \text{ kg}$$

$$a = 20 \text{ cm}$$

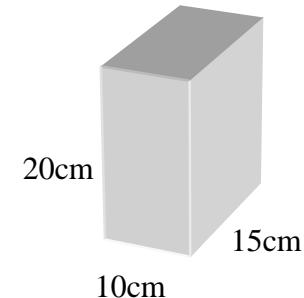
$$b = 10 \text{ cm}$$

$$c = 15 \text{ cm}$$

$$p = ?$$



b)



Sila kojom tijelo djeluje na podlogu je težina tijela: $F = G = mg = 29,43 \text{ N}$.

- a) Površina najveće osnovice: $S_1 = 20 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^2$

$$300 \text{ cm}^2 = 300 \cdot \left(\frac{1}{100} \text{ m} \right)^2 = 300 \cdot \frac{1}{10000} \text{ m}^2 = 0,03 \text{ m}^2$$

$$p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{29,43 \text{ N}}{0,03 \text{ m}^2} = 981 \text{ Pa}$$

- b) $S_2 = 10 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 150 \text{ cm}^2 = 0,015 \text{ m}^2$

$$p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{29,43 \text{ N}}{0,015 \text{ m}^2} = 1962 \text{ Pa}$$

4. Dječak ima masu 40 kg i površinu jednog stopala 120 cm². Koliki pritisak vrši dječak na podlogu kad stoji: a) na jednoj nozi, b) na obje noge?

Rješenje:

$$m = 40 \text{ kg}$$

$$S_1 = 120 \text{ cm}^2 = 0,012 \text{ m}^2$$

$$\underline{S_2 = 2S_1 = 0,024 \text{ m}^2}$$

$$p_1 = ?$$

$$p_2 = ?$$

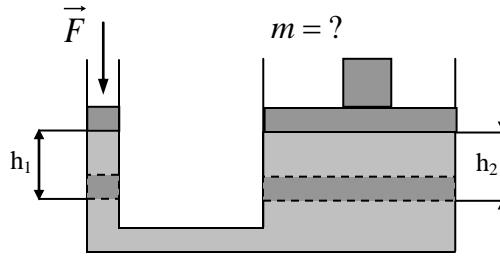
$$p_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{mg}{S_1} = \frac{392,4 \text{ N}}{0,012 \text{ m}^2} = 32700 \text{ Pa}$$

$$p_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{392,4 \text{ N}}{0,024 \text{ m}^2} = 16350 \text{ Pa}$$



5. Na manji klip hidraulične prese, površine 10 cm^2 , djelujemo silom od 20 N .

- Koliku silu proizvodimo na većem klipu površine 100 cm^2 ;
- Kolika je masa tereta kojeg možemo podići tom silom;
- Za koliko se podigne veći klip, ako se manji spusti za $h_1 = 5 \text{ cm}$?



Rješenje:

$$S_1 = 10 \text{ cm}^2$$

$$F_1 = 20 \text{ N}$$

$$S_2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$h_1 = 5 \text{ cm}$$

$$F_2 = ?, m = ?, h_2 = ?$$

$$a) \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 \cdot S_2}{S_1} = 200 \text{ N}$$

$$b) m = \frac{F_2}{g} = 20,39 \text{ kg}$$

$$c) V_1 = V_2 \Rightarrow S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{S_1 h_1}{S_2} = \frac{10 \text{ cm}^2 \cdot 5 \text{ cm}}{100 \text{ cm}^2} = 0,5 \text{ cm} = 5 \text{ mm}$$

6. Kolikom silom djeluje voda na dlan čovječije ruke, površine 100 cm^2 , na dubini 10 m ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$S = 100 \text{ cm}^2 = 0,01 \text{ m}^2$$

$$h = 10 \text{ m}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$F = ?$$

$$p = \frac{F}{S} \Rightarrow F = p \cdot S$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ m} = 100000 \text{ Pa}$$

$$F = 100000 \text{ Pa} \cdot 0,01 \text{ m}^2 = 1000 \text{ N}; F = 1 \text{ kN}$$

7. Koliki je hidrostatički pritisak u cijevi napunjenoj živom, na dubini 76 cm ? ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $\rho_z = 13600 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje:

$$h = 76 \text{ cm} = 0,76 \text{ m}$$

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

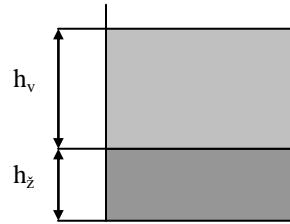
$$g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$p = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,76 \text{ m} = 101292,8 \text{ Pa}$$

$$\rho_z = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p = ?$$

8. U valjkastu posudu nasuli smo jednake mase žive i vode tako da je ukupna visina $h = 29,2$ cm. Koliki je pritisak na dno posude? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Rješenje:

$$m_v = m_z$$

$$h = h_v + h_z = 29,2 \text{ cm} = 0,292 \text{ m}$$

$$\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\rho_z = 13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$p = ?$$

Uslov zadatka: $m_v = m_z \Rightarrow \rho_v \cdot V_v = \rho_z \cdot V_z$ ili $\rho_v \cdot S \cdot h_v = \rho_z \cdot S \cdot h_z \Rightarrow h_v = 13,6 h_z$

Kako je $h = h_v + h_z = 0,292 \text{ m} \Rightarrow h_z = 0,02 \text{ m}$

$$p = p_v + p_z = \rho_v \cdot g \cdot h_v + \rho_z \cdot g \cdot h_z = \rho_v \cdot g \cdot 13,6 h_z + \rho_z \cdot g \cdot h_z$$

$$p = g \cdot h_z \cdot (\rho_v \cdot 13,6 + \rho_z); p = 5440 \text{ Pa}$$

9. Kada se neko tijelo okači na dinamometar, na njegovoj skali se očitava iznos $G = 3,2 \text{ N}$, a kada se potopi u vodu $G_1 = 2,5 \text{ N}$. Odredi: a) masu tijela, b) silu potiska koja djeluje na tijelo, c) zapreminu tijela, d) gustinu tijela.

Rješenje:

$$G = 3,2 \text{ N}$$

$$\text{a)} m = \frac{G}{g} = \frac{3,2 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,326 \text{ kg}$$

$$G_1 = 2,5 \text{ N}$$

$$\text{b)} F_p = G - G_1 = 3,2 \text{ N} - 2,5 \text{ N} = 0,7 \text{ N}$$

$$\rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$m = ?, F_p = ?, V = ?, \rho = ?$$

$$\text{c)} F_p = \rho_0 \cdot g \cdot V \Rightarrow V = \frac{F_p}{\rho_0 \cdot g} = \frac{0,7 \text{ N}}{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,00007136 \text{ m}^3 = 71,36 \text{ cm}^3$$

$$\text{d)} \rho = \frac{m}{V} = \frac{0,326 \text{ kg}}{0,00007136 \text{ m}^3} = 4568,4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

10. Tijelo ima masu 40 kg i gustinu 2000 kg/m^3 . Kolikom silom to tijelo možemo držati u vazduhu, a kolikom u vodi ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$)?

Rješenje:

$$m = 40 \text{ kg} \quad G = m \cdot g = 40 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 400 \text{ N}$$

$$\rho = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad G_1 = G - F_p;$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad F_p = \rho_0 \cdot g \cdot V = \rho_0 \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{40 \text{ kg}}{2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}$$

$$\rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad F_p = 200 \text{ N}$$

$$G = ?, G_1 = ? \quad G_1 = 400 \text{ N} - 200 \text{ N} = 200 \text{ N}$$

11. Tijelo je dva puta lakše u vodi nego u vazduhu. Kolika mu je gustina? ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Rješenje:

$$G_1 = \frac{G}{2} \quad G_1 = G - F_p$$

$$\frac{G}{2} = G - F_p$$

$$\frac{mg}{2} = mg - \rho_0 \cdot g \cdot V$$

$$\frac{mg}{2} = mg - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{m}{\rho} \Rightarrow 2 \frac{\rho_0}{\rho} = 1 \Rightarrow \rho = 2\rho_0 = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

12. Koliki dio ledene sante strši iznad površine mora? Gustina leda je 920 kg/m^3 , a morske vode 1030 kg/m^3 .

Rješenje:

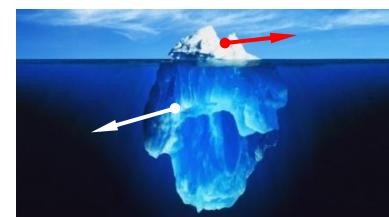
Pri plivanju tijelo izlazi samo izvjesnim dijelom iznad površine vode, tako da se uspostavlja ravnoteža, odnosno jednakost potiska i težine tijela. Potisk dјeluje samo na onaj dio tijela koji se nalazi ispod nivoa površine vode. U našem slučaju tu zapreminu ćemo označiti sa V_2 :

$$F_p = G; \rho_V \cdot g \cdot V_2 = m_L \cdot g; m_L = \rho_L \cdot V_L$$

$$\boxed{\rho_V \cdot g \cdot V_2 = \rho_L \cdot g \cdot V_L;}$$

$$V_L = V_1 + V_2 \Rightarrow V_2 = V_L - V_1$$

$$\rho_V \cdot (V_L - V_1) = \rho_L \cdot V_L$$



Nakon sređivanja se dobije: $V_1 = \frac{\rho_V \cdot V_L - \rho_L \cdot V_L}{\rho_V} = \frac{V_L \cdot (\rho_V - \rho_L)}{\rho_V} = 0,11V_L$ ili 11 % ukupne zapremine sante leda strši iznad površine mora.

Zadatak se mogao riješiti i ovako: $\rho_V \cdot g \cdot V_2 = \rho_L \cdot g \cdot V_L \Rightarrow \frac{V_2}{V_L} = \frac{\rho_L}{\rho_V}; V_2 = \frac{920}{1030} V_L = 0,89 V_L$



89 % sante je pod vodom, što znači da je 11 % sante iznad površine vode.

13. Sa dubine $h_1 = 4 \text{ m}$, u vodi, pusti se loptica čija je gustina $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$. Na koju visinu h_2 će iskočiti loptica iznad vode? Trenje i otpor sredine zanemariti. Uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rješenje:

$$\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$h_1 = 4 \text{ m}$$

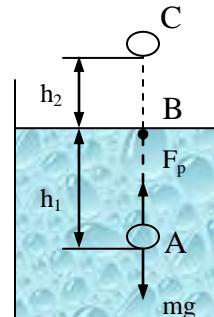
$$h_2 = ?$$

Kuglica se prvi dio puta (h_1) kreće jednakoubrzano pod djelovanjem rezultujuće sile $F = F_p - mg$:

$$m \cdot a = F_p - m \cdot g$$

$$\rho \cdot V \cdot a = \rho_0 \cdot g \cdot V - \rho \cdot V \cdot g$$

$$a = \frac{g \cdot (\rho_0 - \rho)}{\rho} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



Brzina koju postigne kuglica u tački B (kojom izlazi iznad površine vode):

$$v^2 = v_0^2 + 2ah_1$$

Kako je $v_0 = 0$, brzina kuglice u tački B je

$$v = \sqrt{2ah_1} = \sqrt{20 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

Pređeni put h_2 (od tačke B do C) posmatraćemo kao hitac uvis početnom brzinom $v_0 = v$. Tada je:

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{20 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}; h_2 = 1 \text{ m}$$

Zadaci za samostalan rad

- Na stolici težine 50 N sjedi odrastao čovjek čija je težina 750 N. Koliki je pritisak na pod ako stolica ima četiri noge kojima je presjek kvadrat sa stranicama 2 cm?
- Pomoću hidraulične prese silom od 300 N postižemo silu od 9000 N. Kolika mora biti površina velikog klipa ako manji klip ima površinu 20 cm^2 ?
- Kolikom silom djeluje voda na ventil brane, površine 200 cm^2 , na dubini od 10 m? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- Koliki teret može izdržati u vodi prazno bure zapremine 5 m^3 i težine 2 kN? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- Na olovno tijelo koje ima zapreminu 3 m^3 djeluje sila od 600 N vertikalno prema dolje. Kolika je ukupna površina na koju se prenosi pritisak na podlogu ako je pritisak 800 kPa? ($g = 10 \text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{pb}} = 11400 \text{ kg/m}^3$)
- Koliki se teret može podići na velikom klipu hidraulične prese, površine 400 cm^2 , ako na manji klip, površine 20 cm^2 , djelujemo silom od 150 N? Za koliko će se podići veći klip ako se manji spusti za 30 cm?



7. Gornji rub podmornice nalazi se u moru na dubini od 50 m. Koliki je ukupni pritisak na podmornicu ako barometar pokazuje $p_0 = 105070 \text{ Pa}$ atmosferskog pritiska, a gustina morske vode je $\rho_0 = 1020 \text{ kg/m}^3$?
8. Komad željeza teži u vazduhu 650 N. Koliku silu moramo upotrijebiti da ovaj komad držimo u vodi ($\rho_z = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 10 \text{ m/s}^2$)?
9. U fiskulurnoj sali se nalazi 20 učenika poredanih u vrstu. Koliki je ukupni pritisak na podlogu, ako je prosječna masa svakog učenika 35 kg, a prosječna površina jednog stopala 120 cm^2 ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
10. U bazenu dugom 40 m, širokom 30 m i dubokom 2 m nalazi se 1800 m^3 vode. Kolika je visina vode u bazenu i kolikim pritiskom djeluje na dno? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
11. Može li splav koji se sastoji od 15 komada drvenih greda dugih 4 m, širokih 30 cm i debelih 25 cm prevesti preko rijeke automobil težak 11000 N? Gustina drveta je 600 kg/m^3 . ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
12. Sa dubine $h_1 = 1 \text{ m}$ u vodi pusti se komad pluta čija je gustina $\rho = 200 \text{ kg/m}^3$. Na koju visinu h_2 će iskočiti taj komad iznad vode? Trenje i otpor sredine zanemariti. Uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$.
13. Koliki pritisak vrši dječak mase 40 kg, koji drži teret mase 20 kg, kad stoji na podlozi površine 500 cm^2 ? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
14. Na manji klip hidraulične prese površine 10 cm^2 djeluje sila od 20 N. Kolika sila se ostvaruje na većem klipu površine 140 cm^2 i kolika je masa tereta kojeg možemo podići tom silom? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
15. Ako se 40 % neke kocke nalazi iznad površine vode, kolika je gustina tvari od koje je ta kocka napravljena? Uzeti da je gustina vode $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$.
16. Skela je duga 20 m, a široka 10 m. Ako skela ne smije zaroniti dublje u vodu od 15 cm, koliki teret može nositi? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
17. Koliko osoba, prosječne mase 70 kg, može držati na vodi splav napravljen od 25 stabala, ako je zapremina svakog stabla $0,8 \text{ m}^3$, a gustina drveta 650 kg/m^3 ? Uzeti $g = 10 \text{ m/s}^2$. (*Kantonalno takmičenje iz fizike učenika osnovnih škola TK 2012. god.*)
18. U rezervoar sa vodom spuštena je dugačka cijev prečnika $d = 2 \text{ cm}$ na koju s donje strane potpuno naliježe cilindrični disk debljine $h = 1 \text{ cm}$ i prečnika $D = 10 \text{ cm}$. Gustina materijala diska je $\rho = 3000 \text{ kg/m}^3$, a gustina vode $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$. Odredi na kojem nivou H će se disk odvojiti od cijevi? (*Federalno takmičenje iz fizike učenika osnovnih škola, Tuzla 1998. god.*)

Rješenja zadataka za samostalan rad:

$$1. \quad F = G_1 + G_2 = 800N$$

$$S = 4 \cdot a^2 = 16cm^2 = 0,0016m^2$$

$$p = \frac{F}{S} = 500kPa$$

$$2. \quad F_1 : S_1 = F_2 : S_2 \Rightarrow S_2 = 600cm^2;$$

$$3. \quad p = \rho \cdot g \cdot h; \quad F = p \cdot S = 2000N$$

$$4. \quad F = F_p - G = 48000N;$$

$$5. \quad S = \frac{F_u}{p} = \frac{\rho \cdot g \cdot V + F}{p} = 0,43m^2$$

$$6. \quad F_1 : S_1 = F_2 : S_2 \Rightarrow F_2 = 3000N$$

$$F_1 : S_1 = F_2 : S_2 \Rightarrow F_2 = 3000N$$

$$7. \quad p_u = p_0 + \rho_0 \cdot g \cdot h = 533470Pa$$

$$8. \quad G_1 = G - F_p = G - \rho_0 \cdot g \cdot \frac{m_z}{\rho_z} = 566,7N$$

$$9. \quad F = G = 7000; \quad S = 20 \cdot 2 \cdot 120 = 4800cm^2 = 0,48m^2$$

$$p = \frac{F}{S} = 14583,33Pa$$

$$10. \quad h = \frac{V}{a \cdot b} = 1,5m; \quad p = \rho \cdot g \cdot h = 15kPa$$

$$11. \quad F_p = \rho \cdot g \cdot V = 45000N; \quad G = G_1 + G_2 = 38000N; \quad F_p > G$$

Može!

17. Težina splava: $G_1 = m_1g = \rho \cdot g \cdot V = 130000$ N. Sila potiska: $F_p = \rho_0 \cdot g \cdot V = 200000$ N.

Teret kojeg može držati splav: $T = F_p - G_1 = 70000$ N. Težina jedne osobe: $G = mg = 700$ N. Broj osoba: $n = \frac{T}{G} = 100$

18. F_1 - sila pritiska na gornju površinu S_1 ; $F_1 = p_1 S_1$

F_2 - sila pritiska na donju površinu S_2 ; $F_2 = p_2 S_2$

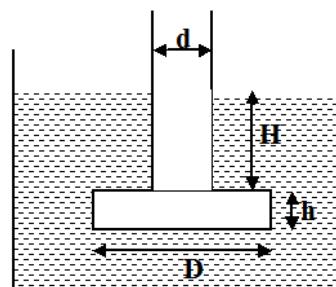
mg -sila teže koja djeluje na disk; $mg = \rho S_2 hg$

$$p_1 = \rho_v g H; \quad S_1 = \frac{D^2}{4} \pi - \frac{d^2}{4} \pi$$

$$p_2 = \rho_v g (H+h); \quad S_2 = \frac{D^2}{4} \pi$$

Disk će se odvojiti od cijevi kada bude ispunjen uslov $F_1 + mg \geq F_2$

$$H = h \frac{D^2}{d^2} \frac{\rho - \rho_v}{\rho_v} = 0,5m = 50cm$$





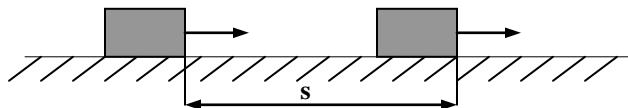
4. Rad, energija, snaga. Prosti mehanizmi

Pregled najvažnijih formula

Mehanički rad brojno je jednak proizvodu sile, koja djeluje u pravcu kretanja tijela, i dužine puta na kojem je ta sila djelovala:

$$A = F \cdot s ;$$

Mjerna jedinica za rad u SI je **džul**: $1J = 1N \cdot 1m$



Rad sile pri pomjeranju tijela u gravitacionom polju Zemlje:

$$A = m \cdot g \cdot h$$

Kinetička energija tijela, u odsustvu rotacije, jednak je poluproizvodu njegove mase i kvadrata brzine:

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Gravitaciona potencijalna energija tijela jednaka je proizvodu njegove mase, ubrzanja Zemljine teže i visine na koju je podignuto tijelo u odnosu na referentni nivo:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

$$[E_k] = [E_p] = [A] = 1J$$

Ukupna mehanička energija izolovanog sistema, u kojem nema djelovanja sila trenja, jednaka je zbiru kinetičke i potencijalne energije i konstantna je:

$$E = E_k + E_p = \text{konst}$$

Tijelo može vršiti rad savlađujući vanjske sile; tada se njegova mehanička energija smanjuje. Isto tako i vanjske sile mogu vršiti rad nad nekim tijelom, čime se mehanička energija tijela povećava. U oba slučaja rad je brojno jednak razlici mehaničkih energija prije i poslije međudjelovanja:

$$A = \Delta E$$

Snaga je jednaka količniku rada i vremena za koje je taj rad izvršen:

$$P = \frac{A}{t} ; P = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v ; P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$$

Mjerna jedinica za snagu je **wat**: $1W = 1 \frac{J}{s} \Rightarrow 1J = 1Ws$

Odnos između korisnog i uloženog rada dat je relacijom:

$$A_k = k_{kd} \cdot A_u , \text{ gdje je}$$

k_{kd} - koeficijent korisnog djelovanja i izražava se u %

$k_{kd} \leq 1$, pa je i $A_k \leq A_u$. Za $k_{kd} = 100\%$, tj za $k_{kd} = 1 \Rightarrow A_k = A_u$

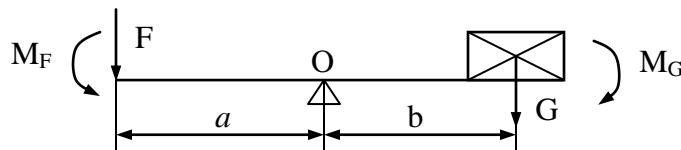
Isti ovaj odnos važi i za korisnu i uloženu snagu.

Pomoću prostih mehanizama lakše obavljamo rad, tj. manjim silama savlađujemo veće terete:



- dvostrana poluga

Kod dvostrane poluge radna sila i teret djeluju sa suprotnih strana oslonca (O).



Najkraće pravolinijsko rastojanje od napadne linije sile do ose (tačke) obrtanja je **krak sile**.

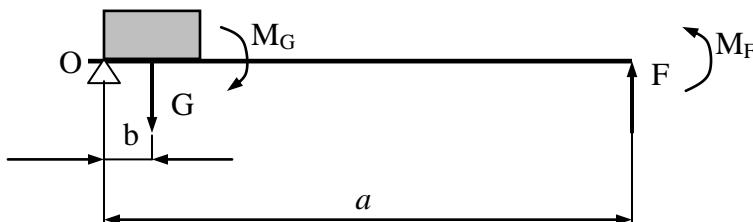
Ravnoteža na poluzi nastupa kad je proizvod radne sile (F) i njenog kraka (a) jednak proizvodu tereta (G) i njegovog kraka (b):

$$F \cdot a = G \cdot b$$

Proizvod sile i njenog kraka predstavlja naročitu fizičku veličinu koju zovemo **moment sile**, pa možemo reći da je **poluga u ravnoteži kad je moment radne sile brojno jednak momentu tereta**. Moment sile je **vektorska veličina**.

U opštem slučaju, kad na polugu djeluje više sile, ravnoteža se uspostavlja kad je suma momenata svih sile za odabranu tačku jednaka nuli, ili, kad je zbir momenata svih sila koje zaokreću polugu u jednom smjeru jednak zbiru momenata svih sila koje polugu zaokreću u suprotnom smjeru.

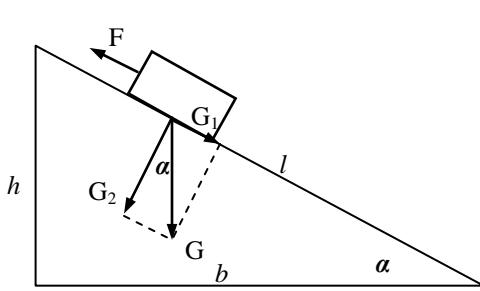
- jednostrana poluga



Kod jednostrane poluge radna sila i teret djeluju sa iste strane oslonca (O). Uslov ravnoteže je isti kao i za dvostranu polugu:

$$F \cdot a = G \cdot b$$

- strma ravan



Veličine koje karakterišu strmu ravan

su:

dužina strme ravni l

visina strme ravni h

osnovica strme ravni b

uspon $u = \frac{h}{l}$

ugao nagiba α

Kada se tijelo mase m nalazi na strmoj ravni javljaju se sljedeće sile:

$$G = m \cdot g; \quad G_1 = G \cdot \frac{h}{l} = G \cdot u; \quad G_2 = G \cdot \frac{b}{l}$$



Sila kojom treba djelovati da bi tijelo bilo u ravnoteži (ili se kretalo ravnomjerno pravolinjski uz strmu ravan):

$$F = G_1 = G \cdot \frac{h}{l} = G \cdot u \text{ (kad nema trenja)}$$

Ako se između strme ravni i tijela javlja trenje:

$$F = G \cdot \frac{h}{l} + F_{tr}$$

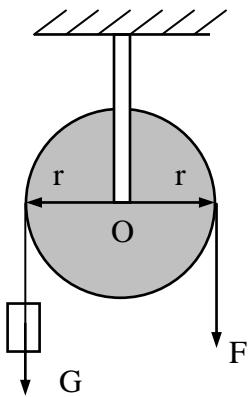
Odnos između osnovice, visine i dužine strme ravni: $l^2 = h^2 + b^2$ ili $l = \sqrt{h^2 + b^2}$

- nepomični i pomični kotur

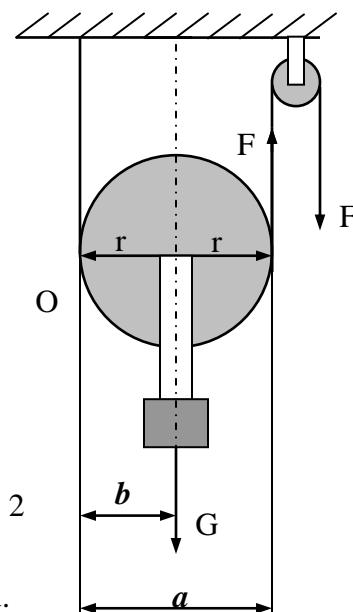
Nepomični kotur (sl. 1) po rasporedu sila u odnosu na oslonac predstavlja dvostranu polugu, pa je i uslov ravnoteže isti kao i za dvostranu polugu:

$$F \cdot a = G \cdot b$$

Kako je $a = b = r$, to je i uslov ravnoteže: $F \cdot r = G \cdot r$, tj. $F = G$



sl. 1



sl. 2

Pomični kotur (sl. 2) predstavlja jednostranu polugu.

Uslov ravnoteže: $F \cdot a = G \cdot b$

$$a = 2r; b = r; F \cdot 2r = G \cdot r \Rightarrow F = \frac{G}{2}$$

Zadaci za vježbu

1. Mehanički rad, grafički prikaz rada

1. Radnik vozi na trokolici 50 komada betonskih blokova teških 50 N stalnom brzinom od 1 m/s. Koliki rad izvrši za pola sata ako je koeficijent trenja 10 %?

Rješenje:

$$n = 50$$

$$G = n \cdot G_1 = 2500N$$

$$G_1 = 50N$$

$$A = F \cdot s$$

$$v = 1 \frac{m}{s}$$

$$F = \mu \cdot G; s = v \cdot t$$

$$\mu = 10\% = 0,1$$

$$A = \mu \cdot G \cdot v \cdot t = 0,1 \cdot 2500N \cdot 1 \frac{m}{s} \cdot 1800s$$

$$t = 30 \text{ min} = 1800s$$

$$A = 450000J$$

$$A = ?$$

2. Pritisak pare u parnoj mašini iznosi 250 kPa. Koliki rad izvrši klip poprečnog presjeka 1200 cm² za 10 pomaka ako jedan pomak iznosi 70 cm?

Rješenje

$$p = 250kPa = 250000Pa$$

$$A = F \cdot s;$$

$$S = 1200cm^2 = 0,12m^2$$

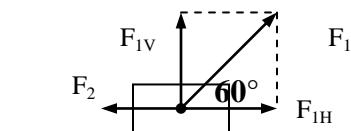
$$F = p \cdot S = 250000Pa \cdot 0,12m^2 = 30000N$$

$$s = 10 \cdot 70 = 700cm = 7m$$

$$A = 30000N \cdot 7m = 210000J$$

$$A = ?$$

3. Tijelo se kreće po horizontalnoj ravni. S prednje strane, vučemo ga udesno stalnom silom 300 N pod uglom 60° u odnosu na smjer kretanja. Istovremeno, sa zadnje strane, tijelo vučemo stalnom silom od 30 N, suprotno od smjera kretanja. Koliki rad izvrše te sile pri pomaku tijela za 5 metara udesno?



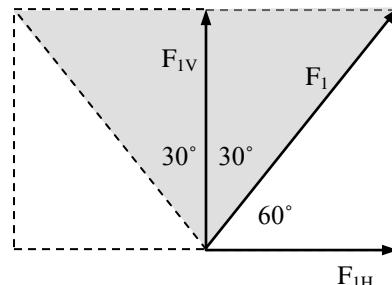
Rješenje:

Rad vrše sile F_{1H} (to je horizontalna komponenta sile F_1) i sila F_2 jer obje sile djeluju u pravcu kretanja tijela.

Kako ćemo izračunati iznos sile F_{1H} ? Posmatrajmo paralelogram kojeg smo formirali od komponentnih sile F_{1H} i F_{1V} . Dijagonala tog paralelograma je zadana sila F_1 , a veličine stranica odgovaraju veličinama komponentnih sile.



Formirajmo jednakostranični trougao kao na slici. Tada je F_1 stranica tog trougla, F_{1V} njegova visina, a F_{1H} polovina stranice. Jasno je, dakle, da je $F_{1H} = \frac{F_1}{2} = 150N$



Sila F_{1H} djeluje u smjeru kretanja tijela, pa je rad te sile pozitivan, dok je rad sile F_2 negativan. Ukupni rad je:

$$A = A_1 - A_2 = F_{1H} \cdot s - F_2 \cdot s = s \cdot (F_{1H} - F_2) = 5m \cdot (150N - 30N); A = 600J.$$

Zadatak se mogao riješiti i ovako:

Tijelo se kreće pod djelovanjem rezultujuće sile $F_R = F_{1H} - F_2 = 120N$

$$A = F_R \cdot s = 600J$$

4. Stalna sila podiže tijelo mase 100 kg na visinu 15 metara za vrijeme od 10 sekundi. Izračunaj rad te sile.

Rješenje:

$$m = 100kg$$

$$A = F \cdot s;$$

$$h = 15m$$

$$s = h$$

$$t = 10s$$

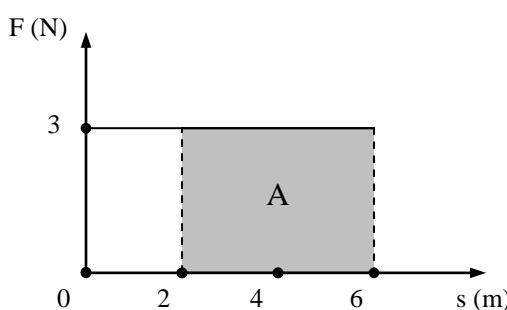
$$F = m \cdot (g + a); a = \frac{2h}{t^2} = 0,3 \frac{m}{s^2}$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$F = 1030N; A = 1030N \cdot 15m = 15450J$$

$$A = ?$$

5. Na slici je prikazan grafik sila – put. Koliki je izvršeni rad sile na putu 6 m? Šta predstavlja obojena površina? Koliki je rad sile između drugog i šestog metra puta?



Rješenje:

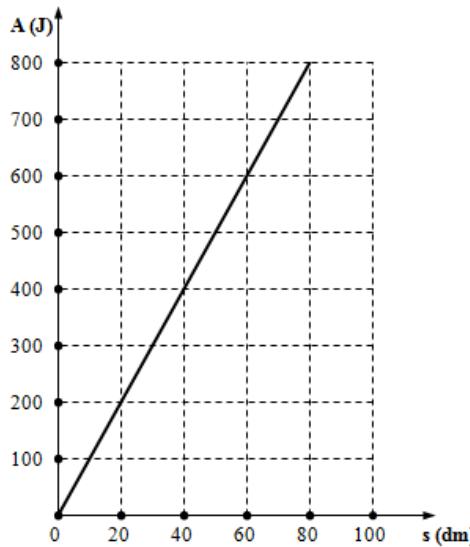
$$A = F \cdot s = 3N \cdot 6m = 18J$$

Obojena površina predstavlja rad sile između drugog i šestog metra puta.

$$A_l = F \cdot s_1 = 3N \cdot 4m = 12J$$

6. Na osnovu grafika na slici odredi:

- Kolika je brojna vrijednost rada na putu 4 m?
- Koliki je intenzitet sile pri izvršenom radu od 200 J?
- Kolika je dužina puta kad je pri dejstvu sile izvršen rad od 0,8 kJ?



Rješenje:

a) Sa grafika se vidi da je

$$A = 400J$$

$$\text{b)} \quad F = \frac{A}{s} = \frac{200J}{2m} = 100N$$

c) Sa grafika očitavamo

$$s = 8m$$

2. Kinetička i potencijalna energija i zakon održanja mehaničke energije

7. Za koliko je veća kinetička energija metka mase 9 g koji leti brzinom od 600 m/s od kinetičke energije osobe mase 50 kg koja trči brzinom od 18 km/h?

Rješenje:

$$m_1 = 9g = 0,009kg$$

$$v_1 = 600 \frac{m}{s}$$

$$m_2 = 50kg$$

$$v_2 = 18 \frac{km}{h} = 5 \frac{m}{s}$$

$$E_{K1} = ?; E_{K2} = ?$$

$$E_{K1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} = \frac{0,009kg \cdot \left(600 \frac{m}{s}\right)^2}{2} = 1620J$$

$$E_{K2} = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{50kg \cdot \left(5 \frac{m}{s}\right)^2}{2} = 625J$$

$$E_{K1} - E_{K2} = 1620J - 625J = 995J$$

8. Tijelo mase 2 kg podigli smo na visinu 20 m. Odredi:

- a) gravitacionu potencijalnu energiju tijela na toj visini,
- b) kinetičku energiju tijela nakon 1 s slobodnog pada,
- c) brzinu tijela u najnižoj tački putanje. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$m = 2kg$$

$$h = 20m$$

$$t = 1s$$

$$g = 10 \frac{m}{s^2}$$

$$E_p = ?; E_k = ?; v = ?$$

$$a) E_p = mgh = 2kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 20m = 400J$$

$$b) v = g \cdot t = 10 \frac{m}{s}; E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{2kg \cdot \left(10 \frac{m}{s}\right)^2}{2} = 100J$$

$$c) v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 20m} = \sqrt{400 \frac{m^2}{s^2}} = 20 \frac{m}{s}$$

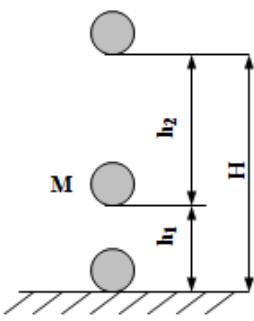


9. Sa visine 30 metara pušteno je tijelo da slobodno pada. Na kojoj visini iznad tla će njegova kinetička energija da bude dva puta veća od potencijalne?

Rješenje:

$$H = 30 \text{ m}$$

$$\frac{E_k = 2E_p}{h_1 = ?}$$



Označimo sa M položaj tijela u kojem je

$$E_k = 2E_p.$$

Do tog položaja tijelo je prešlo put h_2 , a tražena visina iznad tla je označena kao h_1 .

$$E_k = 2E_p \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = 2mgh_1; v^2 = 2gh_2 \text{ pa je}$$

$$\frac{m \cdot 2 \cdot g \cdot h_2}{2} = 2mgh_1, \text{ odnosno nakon kraćenja}$$

$$h_2 = 2h_1. \text{ Kako je } H = h_1 + h_2 \text{ i } h_2 = H - h_1 \text{ možemo pisati:}$$

$$H - h_1 = 2h_1; H = 3h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{H}{3} = 10 \text{ m}$$

10. Tijelo je izbačeno vertikalno uvis početnom brzinom $v = 40 \text{ m/s}$. Na kojoj visini iznad tla će njegova kinetička i gravitaciona potencijalna energija da budu jednake? Otpor vazduha zanemariti, uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$

Rješenje:

$$v_0 = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_k = E_p \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = mgh$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v^2 = v_0^2 - 2gh$$

$$\frac{v_0^2 - 2gh}{2} = gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{\left(40 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{4 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 40 \text{ m}$$

11. Tijelo mase 1 kg počne slobodno da pada sa visine $H = 30 \text{ m}$. Kolika je njegova kinetička i potencijalna energija na visini $h_2 = 10 \text{ metara}$ iznad tla? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$H = 30 \text{ m}$$

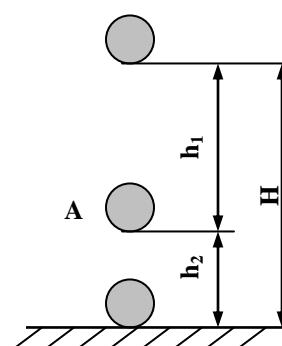
$$h_2 = 10 \text{ m}$$

$$h_1 = 20 \text{ m}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E_k = ?, E_p = ?$$



$$E_k = \frac{mv^2}{2}; v^2 = 2gh_1 \Rightarrow E_k = \frac{2mgh_1}{2} = mgh_1; E_k = 1kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 20m; E_k = 200J$$

$$E_p = mgh_2 = 1kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 10m; E_p = 100J$$

12. Tijelo mase 2 kg nalazi se na visini $h = 30$ m iznad zemlje. Kolika je njegova kinetička, a kolika potencijalna energija na kraju druge sekunde slobodnog padanja? Na kojoj visini iznad zemlje su kinetička i potencijalna energija tijela jednake? Uzeti $g = 10 \text{ m/s}^2$.
(Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike TK, 2012. god.)

Rješenje:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$H = 30 \text{ m}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E_K = ?$$

$$E_P = ?$$

$$h_1 = ?$$

Nakon 2 s slobodnog pada tijelo stekne brzinu:

$$v = g \cdot t = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s}$$

$$v = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kinetička energija tijela je:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot \left(20 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2}$$

$$E_K = 400 \text{ J}$$

Nakon 2 s slobodnog pada tijelo

pređe put:

$$h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (2 \text{ s})^2}{2}$$

$$h = 20 \text{ m}$$

Potencijalna energija tijela je:

$$E_P = mg(H - h) =$$

$$= 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (30 \text{ m} - 20 \text{ m})$$

$$E_P = 200 \text{ J}$$

Visina h_1 iznad zemlje na kojoj je $E_K = E_P$:

$$E_K = E_P$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_1$$

$$\frac{m \cancel{v}^2}{2} = mg(H - h_1) \quad | :mg$$

$$H - h_1 = h_1$$

$$2h_1 = H$$

$$h_1 = \frac{H}{2}; h_1 = 15 \text{ m}$$

13. Tijelo mase 1 kg bačeno je vertikalno uvis i poslije 2 s ima kinetičku energiju $E_K = 32 \text{ J}$.
 a) Kolika mu je u tom trenutku brzina? b) Kolikom je brzinom izbačeno? c) Kolika mu je potencijalna energija u tom trenutku? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



Rješenje:

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$E_K = 32 \text{ J}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a) v = ?$$

$$b) v_0 = ?$$

$$c) E_P = ?$$

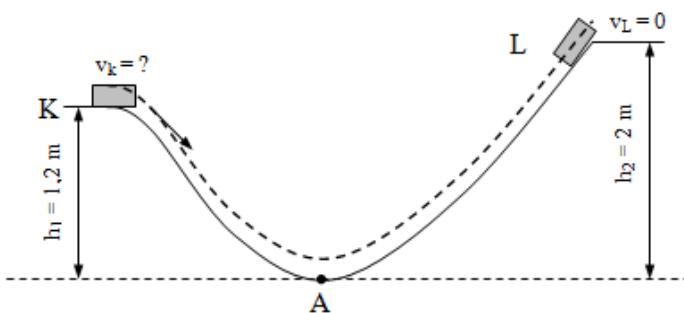
$$a) E_K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32 \text{ J}}{1 \text{ kg}}} ; v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$b) v = v_0 - gt \Rightarrow v_0 = v + gt = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{ s} ; v_0 = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c) E_P = mgh; h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} - \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s}^2}{2} = 36 \text{ m}$$

$$E_P = 1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 36 \text{ m} ; E_P = 360 \text{ J}$$

14. Kolikom brzinom v_k je gurnuto tijelo mase $m = 2 \text{ kg}$ iz tačke K ako se zaustavi u tački L. Trenje se zanemaruje. $g = 10 \text{ m/s}^2$. Kolika je kinetička energija tijela u tački K?



Rješenje:

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v_k = ?$$

$$E_{kk} = ?$$

Prema zakonu o održanju mehaničke energije, ukupna mehanička energija u tački K mora biti jednaka ukupnoj mehaničkoj energiji u tački L.

Mehanička energija u tački K: $E_K = \frac{mv_k^2}{2} + mgh_1$, a u tački L: $E_L = mgh_2$

$$E_K = E_L \Rightarrow \frac{mv_k^2}{2} + mgh_1 = mgh_2 \Rightarrow v_k = \sqrt{2g \cdot (h_2 - h_1)} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$E_{kk} = \frac{mv_k^2}{2} = \frac{2 \text{ kg} \cdot 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2} = 16 \text{ J}$$

3. Odnos rada i energije

15. Puščano zrno mase 10 g, pri brzini 500 m/s, probilo je dasku debljine 8 cm. Pri izlasku iz daske imalo je brzinu 300 m/s. a) Koliki rad je izvršilo zrno pri probijanju daske? b) Kolika je srednja sila otpora daske?



Rješenje:

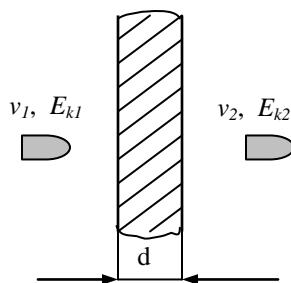
$$m = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$$

$$v_1 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$d = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$$

$$v_2 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$A = ?; F_o = ?$$



$$A = \Delta E_k = E_{k1} - E_{k2}$$

$$A = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (v_1^2 - v_2^2)$$

$$A = \frac{0,01 \text{ kg}}{2} \cdot (250000 - 90000) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$A = 800 \text{ J}$$

$$A = F_o \cdot d \Rightarrow F_o = \frac{A}{d} = \frac{800 \text{ J}}{0,08 \text{ m}} = 10 \text{ kN}$$

16. Koliki rad treba izvršiti da se brzina tijela, mase 10 kg, poveća od 5 m/s do 54 km/h?

Rješenje:

$$m = 10 \text{ kg}$$

$$v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$A = ?$$

$$A = \Delta E_k = \Delta E_{k2} - \Delta E_{k1} = \frac{mv_2^2 - mv_1^2}{2}$$

$$A = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

$$A = 1000 \text{ J} = 1 \text{ kJ}$$

17. Na horizontalnom dijelu puta, dužine $l = 3 \text{ km}$, brzina automobila, mase $m = 3 \text{ t}$, poveća se od $v_1 = 36 \text{ km/h}$ do $v_2 = 72 \text{ km/h}$. Koeficijent trenja pri kretanju automobila je 0,01. Odredi utrošeni rad motora za ovo povećanje brzine.

Rješenje:

$$l = 3 \text{ km} = 3000 \text{ m}$$

$$m = 3t = 3000 \text{ kg}$$

$$\mu = 0,01$$

$$v_1 = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_2 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$A = ?$$

Rad motora se utroši na povećanje kinetičke energije automobila ΔE_k i na savlađivanje sile trenja

$$A_r = F_{tr} \cdot l = \mu \cdot m \cdot g \cdot l$$

$$A = \Delta E_k + A_r = \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \mu \cdot m \cdot g \cdot l$$

$$A = \frac{3000 \text{ kg}}{2} \cdot (400 - 100) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 0,01 \cdot 3000 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3000 \text{ m}$$

$$A = 450000 \text{ J} + 882900 \text{ J} = 1332900 \text{ J}$$

18. Lopta mase 150 g bačena je vertikalno uvis početnom brzinom 22 m/s i ona dostigne visinu 18 m. Koliki je rad izvršila lopta na savlađivanju otpora vazduha?

Rješenje:

$$m = 150 \text{ g} = 0,15 \text{ kg}$$

$$A = \Delta E = E_k - E_p = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$$

$$v_0 = 22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$A = m \cdot \left(\frac{v_0^2}{2} - gh \right) = 0,15 \text{ kg} \cdot \left(242 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 18 \text{ m} \right)$$

$$h = 18 \text{ m}$$

$$A = ?$$

$$A = 9,813 \text{ J}$$

4. Snaga

19. Parna lokomotiva ima snagu od 3000 kW. Za koje će vrijeme lokomotiva preći udaljenost od 10,8 km ako je njezina vučna sila $F_v = 240\,000 \text{ N}$?

Rješenje:

$$P = 3000 \text{ kW} = 3000000 \text{ W}$$

$$P = \frac{A}{t} = \frac{F_v \cdot s}{t} \Rightarrow t = \frac{F_v \cdot s}{P}$$

$$s = 10,8 \text{ km} = 10800 \text{ m}$$

$$t = \frac{240000 \text{ N} \cdot 10800 \text{ m}}{3000000 \text{ W}} = 864 \text{ s}$$

$$F_v = 240000 \text{ N}$$

$$t = ?$$

20. Pumpa snage 3,75 kW podiže vodu iz bunara dubokog 20 m. Koliki je stepen korisnog djelovanja motora pumpe ako pumpa za 7 sati rada podigne 3800 hl vode? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$P_U = 3,75 \text{ kW} = 3750 \text{ W}$$

$$k_{KD} = \frac{P_K}{P_U}$$

$$h = 20 \text{ m}$$

$$P_K = \frac{mgh}{t}; m = \rho \cdot V = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 380 \text{ m}^3$$

$$t = 7 \text{ h} = 25200 \text{ s}$$

$$V = 3800 \text{ hl} = 380000 \text{ l} = 380 \text{ m}^3$$

$$m = 380000 \text{ kg}$$

$$k_{KD} = ?$$

$$P_K = \frac{380000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m}}{25200 \text{ s}} = 3015,87 \text{ W}$$

$$k_{KD} = \frac{3015,87 \text{ W}}{3750 \text{ W}} = 0,8 = 80\%$$

21. Na lopatice turbine svake sekunde padne s visine od 5,5 m 0,6 m³ vode. Kolika je uložena, a kolika korisna snaga ako je stepen korisnog djelovanja 70 %? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$t = 1 \text{ s}$$

$$h = 5,5 \text{ m}$$

$$P_U = \frac{mgh}{t} = \frac{\rho \cdot V \cdot g \cdot h}{t} = 33000 \text{ W}$$

$$V = 0,6 \text{ m}^3$$

$$P_K = P_U \cdot k_{KD} = 23100 \text{ W}$$

$$k_{KD} = 70\% = 0,7$$

$$P_U = ?$$

$$P_K = ?$$



5. Poluga

22. Na udaljenosti 8 cm od ose poluge obješen je uteg mase 200 g. Kolikom silom treba djelovati s druge strane poluge, na udaljenosti 20 cm od ose, da bismo postigli ravnotežu? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$b = 8\text{cm}$$

$$G = mg = 0,2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2\text{N}$$

$$m = 200\text{g} = 0,2\text{kg}$$

$$\underline{a = 20\text{cm}}$$

$$F \cdot a = G \cdot b \Rightarrow F = \frac{G \cdot b}{a} = \frac{2\text{N} \cdot 8\text{cm}}{20\text{cm}}$$

$$F = ?$$

$$F = 0,8\text{N}$$

23. Na jedan kraj poluge, duge 60 cm, obješen je teret težine 100 N, a na drugi 140 N. Krakovi sila su jednakim. Na kojem rastojanju od ose obrtanja treba postaviti teret težine 50 N da poluga bude u ravnoteži?

Rješenje:

$$l = 60\text{cm}$$

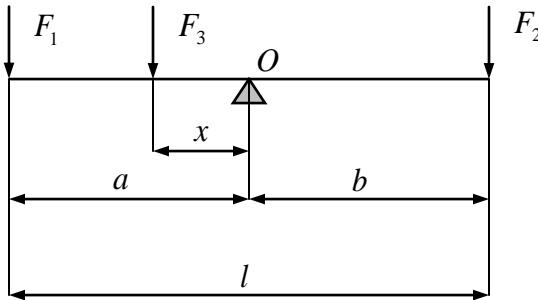
$$a = b = \frac{l}{2} = 30\text{cm}$$

$$F_1 = 100\text{N}$$

$$F_2 = 140\text{N}$$

$$\underline{F_3 = 50\text{N}}$$

$$x = ?$$



Poluga je u ravnoteži kad je suma momenata svih sila koje zaokreću polugu u jednom smjeru jednak sumi momenata svih sila koje polugu zaokreću u suprotnom smjeru, tj.

$$F_1 \cdot a + F_3 \cdot x = F_2 \cdot b.$$

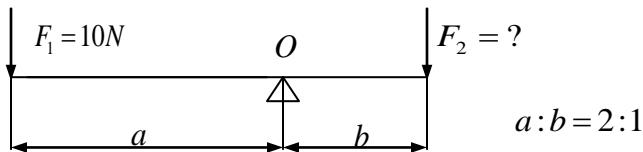
$$F_3 \cdot x = F_2 \cdot b - F_1 \cdot a; a = b = \frac{l}{2}$$

$$F_3 x = F_2 \cdot \frac{l}{2} - F_1 \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \cdot (F_2 - F_1)$$

$$x = \frac{\frac{l}{2} (F_2 - F_1)}{F_3} = \frac{30\text{cm} \cdot 40\text{N}}{50\text{N}} = 24\text{cm}$$



24. Na osnovu podataka sa slike odredi vrijednost sile F_2 da bi poluga bila u ravnoteži.



Rješenje:

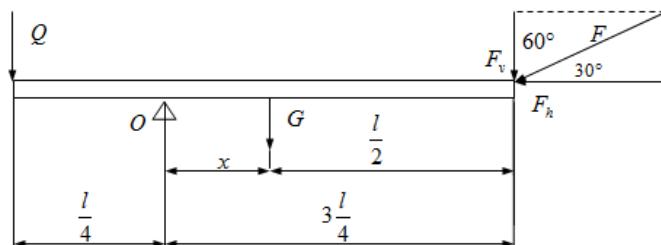
$$F_1 a = F_2 b \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 a}{b}$$

$$a:b = 2:1 \Rightarrow a = 2b$$

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot 2b}{b}; F_2 = 2F_1$$

$$F_2 = 20N$$

25. Polugu tešku 6 N dijeli oslonac u odnosu 1:3. Na kraju kraćeg dijela poluge djeluje teret od 30 N. Nađi silu F koja djeluje na kraju dužeg dijela poluge pod uglom od 60° u odnosu na vertikalni pravac.



Rješenje:

$$G = 6N$$

$$Q = 30N$$

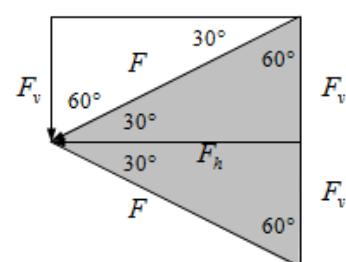
$$F = ?$$

Prvo rastavimo silu F na komponente, i to vertikalnu komponentu F_v i horizontalnu komponentu F_h .

Moment sile F_h za tačku O je jednak nuli jer njena napadna linija prolazi tačkom O, odnosno rastojanje od napadne linije sile F_h do tačke obrtanja (tačke O) je jednako nuli, pa je i moment te sile jednak nuli.

$$\text{Prema tome, uslov ravnoteže je: } Q \cdot \frac{l}{4} = G \cdot x + F_v \cdot 3\frac{l}{4}$$

Odnos između tražene sile F i njene vertikalne komponente F_v odredit ćemo konstruišući jednakoststranični trougao kod kojeg je veličina stranice brojno jednak veličini sile F. Tada je horizontalna komponenta visina trougla, a vertikalna komponenta polovina stranice: $F_v = \frac{F}{2}$.



Na osnovu priloženih crteža možemo takođe zaključiti da je $x = 3\frac{l}{4} - \frac{l}{2}; x = \frac{l}{4}$.

Uslov ravnoteže sada izgleda ovako: $Q \cdot \frac{l}{4} = G \cdot \frac{l}{4} + \frac{F}{2} \cdot 3\frac{l}{4}$, odnosno:

$$2Q \cdot l = 2G \cdot l + 3Fl$$

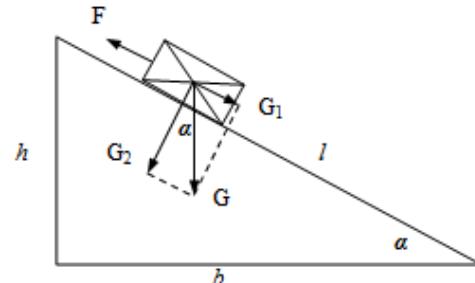
Kada cijelu jednačinu podijelimo sa l dobije se:

$$2Q = 2G + 3F \Rightarrow F = \frac{2(Q-G)}{3}$$

$$F = \frac{2(30N - 6N)}{3} = 16N$$

6. Strma ravan (kosina)

26. Na strmoj ravni, dužine $l = 5$ m i visine $h = 3$ m, nalazi se sanduk težine $G = 2$ kN. Odredi: a) minimalnu silu kojom je potrebno djelovati da bi se sanduk kretao ravnomjerno uz strmu ravan; b) silu kojom sanduk okomito pritiskuje strmu ravan. Trenje između sanduka i podloge se zanemaruje.



Rješenje:

$$l = 5m$$

$$F = G_1 = G \cdot \frac{h}{l} = 2000N \cdot \frac{3m}{5m} = 1200N$$

$$h = 3m$$

$$G = 2kN = 2000N$$

$$G_2 = G \cdot \frac{b}{l}; b = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{(25-9)m^2}; b = \sqrt{16m^2} = 4m$$

$$F = ?$$

$$G_2 = 2000N \cdot \frac{4m}{5m} = 1600N$$

$$G_2 = ?$$

27. Radnici jednoliko vuku sanduk mase 60 kg po strmoj ravni koja je prislonjena na kamion. Kosina je duga 2,4 m, a kamion je visok 1 m. Kolikom silom treba vući sanduk, ako je sila trenja između strme ravni i sanduka 140 N?

Rješenje:

$$m = 60kg \Rightarrow G = mg = 60kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 588,6N$$

$$l = 2,4m$$

$$h = 1m$$

$$F_{tr} = 140N$$

$$F = ?$$

$$F = G \cdot \frac{h}{l} + F_{tr} = 588,6N \cdot \frac{1m}{2,4m} + 140N$$

$$F = 385,25N$$



28. Iz najviše tačke strme ravni koja ima dužinu 10 m i visinu 6 m klizi naniže tijelo oblika kvadra težine 50 N. Odrediti:

- silu paralelnu strmoj ravni koja vuče tijelo naniže;
- silu kojom tijelo pritišće strmu ravan i koja je okomita na strmu ravan;
- silu trenja;
- ubrzanje tijela.

Koeficijent trenja između strme ravni i tijela 0,2, a gravitaciono ubrzanje $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Rješenje:

$$l = 10 \text{ m}$$

$$h = 6 \text{ m}$$

$$\mu = 0,2$$

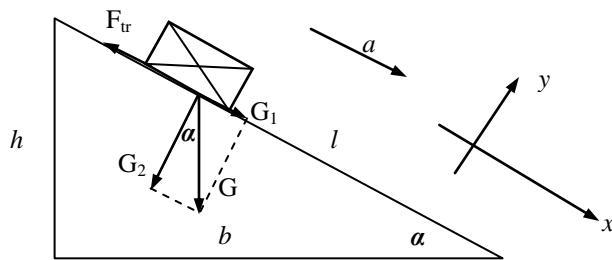
$$G = 50 \text{ N}$$

$$G_1 = ?$$

$$G_2 = ?$$

$$F_{tr} = ?$$

$$a = ?$$



$$G_1 = G \cdot \frac{h}{l} = 50 \text{ N} \cdot \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 30 \text{ N}$$

$$m \cdot a = G_1 - F_{tr}$$

$$b = \sqrt{l^2 - h^2} = 8 \text{ m}$$

$$a = \frac{G_1 - F_{tr}}{m}; m = \frac{G}{g} = \frac{50 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5 \text{ kg}$$

$$G_2 = G \cdot \frac{b}{l} = 50 \text{ N} \cdot \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = 40 \text{ N}$$

$$a = \frac{30 \text{ N} - 8 \text{ N}}{5 \text{ kg}}; a = 4,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_{tr} = \mu \cdot G_2 = 0,2 \cdot 40 \text{ N} = 8 \text{ N}$$

29. Sa vrha strme ravni dužine 2,6 m i visine 1 m klizi naniže predmet težine 52 N. Odrediti:

- Silu trenja klizanja
- Put koji predmet pređe u prvoj sekundi kretanja

Koeficijent trenja između predmeta i podloge iznosi 0,2

$$g = 10 \text{ m/s}^2$$

Rješenje:

$$F_{tr} = \mu \cdot G \cdot \frac{b}{l}; b = \sqrt{l^2 - h^2} = 2,4 \text{ m}$$

$$h = 1 \text{ m}$$

$$F_{tr} = 0,2 \cdot 52 \text{ N} \cdot \frac{2,4 \text{ m}}{2,6 \text{ m}} = 9,6 \text{ N}$$

$$l = 2,6 \text{ m}$$

$$G = 52 \text{ N}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$\mu = 0,2$$

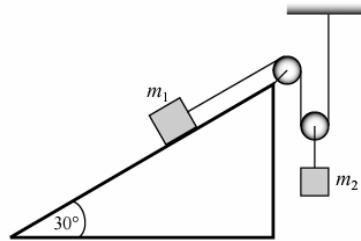
$$F_{tr} = ?; s = ?$$

$$a = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$s = \frac{at^2}{2} = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s}^2}{2}; s = 1 \text{ m}$$



30. Razmotrite sistem prikazan na slici. Mase tijela su jednake $m_1=1 \text{ kg}$ i $m_2 = 5 \text{ kg}$, a nagib kosine u odnosu na horizontalu iznosi 30° . Tijela su povezana nerastezljivim užetom zanemarive mase preko kolotura zanemarive mase. Koliko iznosi ubrzanje tijela mase m_2 i u kojem je smjeru?



Rješenje:

$$m_1 a_1 = T_1 - F_1$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$$

Ako se tijelo mase m_2 pomakne za s , u istom vremenskom intervalu će se tijelo mase m_1 pomaknuti za $2s$. Prema tome slijedi da je akceleracija prvog tijela dvostruko veća od akceleracije drugog tijela: $a_1 = 2a_2$. Komponentu težine F_1 određujemo iz sličnosti trouglova, te ona iznosi:

$$F_1 = \frac{m_1 g}{2}$$

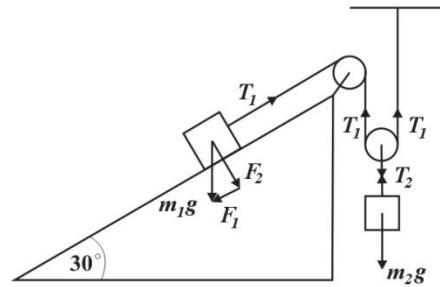
Uvrštavanjem se dobije:

$$2m_1 a_2 = T_1 - \frac{m_1 g}{2}$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - 2T_1$$

Rješavanjem se dobije konačan izraz za akceleraciju tijela mase m_2 :

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{4m_1 + m_2} g; \quad a_2 = 4,36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



7. Kotur

31. Iz bunara podižemo pomoću kola na vratilu posudu s vodom ukupne težine 200 N. Poluprečnik kola je $R = 20 \text{ cm}$, a poluprečnik vratila je $r = 7,5 \text{ cm}$. Koliku silu moramo upotrijebiti i koliki rad izvršiti da posudu podignemo jedanput ako je bunar toliko dubok da do površine vode kamen slobodno pada 2 s? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$G = 200 \text{ N}$$

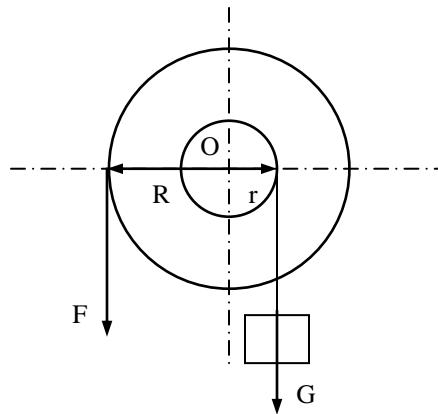
$$R = 20 \text{ cm}$$

$$r = 7,5 \text{ cm}$$

$$t = 2 \text{ s}$$

$$F = ?$$

$$A = ?$$





$$F \cdot R = G \cdot r \Rightarrow F = \frac{G \cdot r}{R} = \frac{200N \cdot 7,5cm}{20cm} ; F = 75N$$

$$A = G \cdot s; s = h = \frac{gt^2}{2} = \frac{10 \frac{m}{s^2} \cdot 4s^2}{2} = 20m$$

$$A = 200N \cdot 20m; A = 4000J = 4kJ$$

32. Pomičnim koturom dižemo teret (komad željeza) čija je zapremina 10 dm^3 silom od 450 N . Kolika je sila trenja ako je težina kotura 20 N ? (gustina željeza: $\rho = 7,8 \text{ kg/dm}^3$; $g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$V = 10 \text{ dm}^3$$

Sila koja drži ravnotežu na koturu uravnotežuje pored ukupnog tereta ($G + G_1$) i silu trenja:

$$F = 450N$$

$$\underline{G_1 = 20N}$$

$$F = \frac{1}{2}(G + G_1) + F_{tr} \Rightarrow F_{tr} = F - \frac{1}{2}(G + G_1)$$

$$\underline{F_{tr} = ?}$$

$$G = m \cdot g; m = \rho \cdot V = 7,8 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} \cdot 10 \text{ dm}^3 = 78 \text{ kg}$$

$$G = m \cdot g = 78 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 780N$$

$$F_{tr} = F - \frac{1}{2}(G + G_1) = 450N - \frac{1}{2}(780N + 20N); F_{tr} = 450N - 400N = 50N$$

33. Pomičnim koturom podiže se teret od $1,35 \text{ kN}$ na visinu od 20 m . Stepen korisnog djelovanja iznosi 90% . Izračunati koristan i uloženi rad kao i vrijeme padanja tijela s navedene visine. ($g = 10 \text{ m/s}^2$)

Rješenje:

$$G = 1,35kN = 1350N \quad A_k = G \cdot h = 1350N \cdot 20m = 27000J = 27kJ$$

$$h = 20m$$

$$\underline{k_{kd} = 90\% = 0,9}$$

$$A_u = \frac{A_k}{k_{kd}} = \frac{27000J}{0,9} = 30000J = 30kJ$$

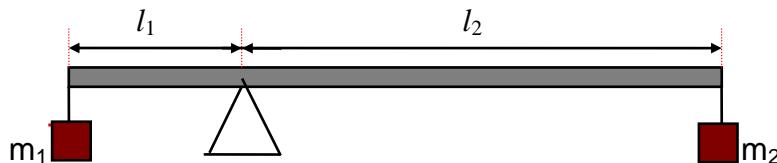
$$\underline{A_k = ?}$$

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20m}{10 \frac{m}{s^2}}} = \sqrt{4s^2} = 2s$$

$$\underline{A_u = ?}$$

$$\underline{t = ?}$$

34. Dvostrana poluga uravnotežena je s dva utega različitih masa i materijala, ali jednakih zapremina, kao na slici. Da li će biti narušena ravnoteža poluge, ako se utezi potope u vodu? (Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Travnik 1996. god.)





Rješenje:

$$V_1 = V_2$$

a) $M_2 - M_1 = ?$ (u vazduhu)

b) $M_2 - M_1 = ?$ (u vodi)

a) Poluga je u ravnoteži za $M_1 = M_2$

$$M_1 = m_1 g l_1$$

$$M_2 = m_2 g l_2$$

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2$$

b) U vodi se javlja sila potiska

$$M_1 = (m_1 g - \rho V_1 g) l_1$$

$$M_2 = (m_2 g - \rho V_2 g) l_2$$

$$M_2 - M_1 = m_2 g l_2 - m_1 g l_1 -$$

$$\rho V_1 g l_1 + \rho V_2 g l_2$$

$$M_2 - M_1 = (m_2 l_2 - m_1 l_1) g -$$

$$\rho g (V_1 l_1 - V_2 l_2)$$

$$M_2 - M_1 = \rho g (V_1 - V_2)$$

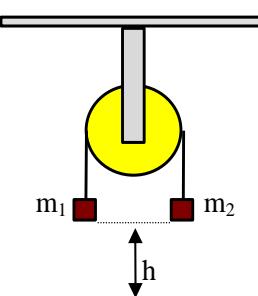
$$V_1 - V_2 = 0$$

$$M_2 - M_1 = 0. \text{ tj. } M_2 = M_1$$

Ravnoteža neće biti narušena.

35. Dva utega mase $m_1 = 1 \text{ kg}$ i mase $m_2 = 2 \text{ kg}$ povezana su tankom niti preko nepomičnog kotura, nalazi se na visini 3 m iznad podlage. Kada utege pustimo, oni će se kretati. Izračunati kinetičku energiju utega mase m_2 u momentu kada padne na podlogu. ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). Trenje zanemariti.

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Travnik 1996. god.)



Rješenje:

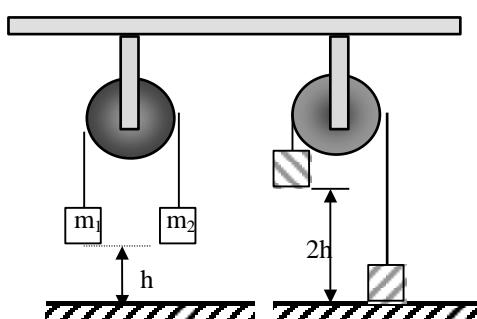
$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$h = 3 \text{ m}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$E_{k2} = ?$$



$$E_1 = (m_1 + m_2)gh$$

$$E_2 = m_1 g \cdot 2h + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$E_1 = E_2$$

$$(m_1 + m_2)gh = m_1 g \cdot 2h + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{(m_2 - m_1)gh}{(m_1 + m_2)}$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_2 v^2$$

$$E_{k2} = m_2 gh \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

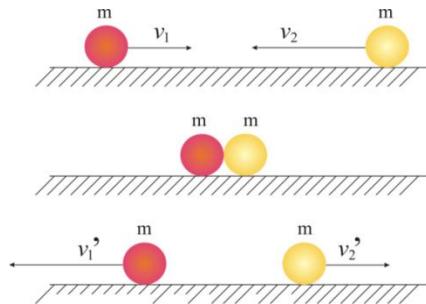
$$E_{k2} = 2 \cdot 9,81 \cdot 3 \frac{2-1}{1+2}$$

$$E_{k2} = 19,62 \text{ J}$$



Čeoni elastični sudar

36. Po savršeno glatkoj ravni kreću se jedna drugoj u susret dvije loptice jednakih masa $m_1 = m_2 = m$, brzinama $v_1 = 10 \text{ m/s}$ i $v_2 = 20 \text{ m/s}$. Kolika će biti brzina loptica nakon elastičnog sudara?



Rješenje:

Zadatak rješavamo primjenom zakona održanja količine kretanja i zakona održanja energije.

$$m_1 = m_2 = m$$

$$v_1 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{array}{c} v_2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \hline v'_1 = ?, v'_2 = ? \end{array}$$

Zakon održanja količine kretanja prema priloženoj slici:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_2 v'_2 - m_1 v'_1$$

Zakon održanja energije:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2}$$

Obzirom da je $m_1 = m_2 = m$, te da se može pokratiti, kao i da se druga jednačina može množiti sa 2, dobije se sistem

$$v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1 \dots \dots \dots (a)$$

$$v_1^2 + v_2^2 = v'_1^2 + v'_2^2 \dots \dots \dots (b)$$

Iz jednačine *a* slijedi da je $v'_2 = v_1 - v_2 + v'_1$.

Kada ovu vrijednost v'_2 uvrstimo u jednačinu *b*, nakon sređivanja dobit ćemo kvadratnu jednačinu

$$v'_1^2 - (v_1 - v_2)v'_1 - v_1 v_2 = 0$$

Iz jednačine *a* također slijedi da je $v'_1 = v_2 - v_1 + v'_2$.

Kada ovu vrijednost v'_2 uvrstimo u jednačinu *b*, nakon sređivanja dobit ćemo kvadratnu jednačinu

$$v'_2^2 + (v_2 - v_1)v'_2 - v_1 v_2 = 0$$



Uvrštavanjem zadanih vrijednosti brzina v_1 i v_2 (bez mjernih jedinica) dobijemo dvije kvadratne jednačine

$$v_1'^2 + 10v'_1 - 200 = 0$$

i

$$v_2'^2 + 10v'_2 - 200 = 0$$

koje imaju ista rješenja, a to su 10 i -20.

Tada ćemo pisati da je $v'_2 = v_1 = 10 \text{ m/s}$ i da je $v'_1 = v_2 = -20 \text{ m/s}$. To znači da se pri čeonom elastičnom sudaru tijela istih masa, brzine tijela međusobno izmijene.

Idealno neelastični sudar

37. Metak mase $m_1 = 10 \text{ g}$ leti brzinom $v_1 = 500 \text{ m/s}$ i udari u nepokretnu metu mase $m_2 = 5 \text{ kg}$, koja visi na niti. Metak ostane u meti. a) Na koju će se visinu popeti meta? b) Koliko je mehaničke energije prešlo u unutrašnju energiju?

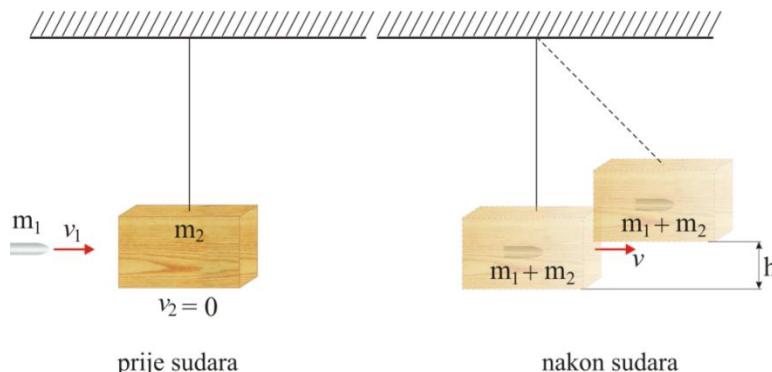
Rješenje:

$$m_1 = 10 \text{ g} = 0,01 \text{ kg}$$

$$v_1 = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}$$

$$h = ?, \Delta E = ?$$



$$v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = 5 \text{ cm}$$

Energija sistema prije sudara jednaka je kinetičkoj energiji metka

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = 1250 \text{ J.}$$

Nakon sudara

$$E_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = 2,5 \text{ J}$$

Ili, ako ćemo računati potencijalnu energiju mete u kojoj je metak, a koja se popela na visinu 5 cm

$$E_P = (m_1 + m_2)gh = 2,5 \text{ J}$$

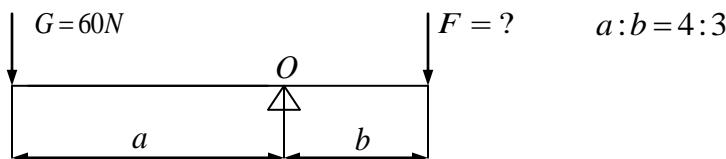
$$\Delta E = E_1 - E_2 = 1247,5 \text{ J}$$

Zadaci za samostalan rad

- Tijelo mase 2 kg podigli smo na visinu 30 m. a) Kolika je gravitaciona potencijalna energija tijela na toj visini? b) Kolika je kinetička energija tijela nakon 2 s slobodnog pada? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
- Tijelo mase 1 kg podigli smo na visinu 20 m. Koliki smo rad pri tome izvršili? Kolika je kinetička energija tijela nakon 1 s slobodnog pada? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)



3. Gvozdena kugla, mase $m_1 = 20 \text{ kg}$, nalazi se na visini $h_1 = 2 \text{ m}$. Na kojoj visini h_2 treba da se nalazi olovna kugla, mase $m_2 = 50 \text{ kg}$, da bi posjedovala istu gravitacionu potencijalnu energiju kao i gvozdena kugla?
4. Kamen, mase $0,8 \text{ kg}$, slobodno pada. Koliko iznosi njegova kinetička energija poslije vremena $t_1 = 10 \text{ s}$ od početka padanja, a koliko poslije vremena $t_2 = 15 \text{ s}$? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
5. Metak mase 10 g kreće se brzinom od 600 m/s , a dječak mase 45 kg trči brzinom od $2,88 \text{ km/h}$. Koje tijelo ima veću kinetičku energiju i za koliko?
6. Kamen mase 2 kg slobodno padne sa visine 45 m i zabije se 20 cm u pjesak. Kolikom je brzinom kamen udario o tlo i kolika je sila otpora pjesaka? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
7. Puščano zrno mase 5 g , pri brzini 600 m/s , probilo je dasku debljine 10 cm . Pri izlasku iz daske imalo je brzinu 400 m/s . a) Koliki rad je izvršilo zrno pri probijanju daske? b) Kolika je srednja sila otpora daske?
8. Lopta, mase 100 g , bačena je vertikalno naviše početnom brzinom $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Kolika je gravitaciona potencijalna energija lopte u najvišoj tački putanje? ($g = 10 \text{ m/s}^2$)
9. Kolikom početnom brzinom treba sa visine $h = 3 \text{ m}$ baciti vertikalno naniže loptu da bi se poslije elastičnog odbijanja od horizontalne ploče podigla na visinu 8 m ? Otpor vazduha zanemariti.
10. Vozilo snage $58,86 \text{ kW}$ pređe 30 m za 1 minutu . Kolika je vučna sila vozila i koliki rad se izvrši na putu od 1 km ?
11. Kolika je snaga dizalice koja diže teret $G = 1,5 \text{ kN}$ brzinom $v = 0,8 \text{ m/s}$? Koeficijent korisnog djelovanja dizalice je 75% ?
12. Koliki teret može podići za 2 minute dizalica snage 4 kW na visinu 10 m ?
13. Pri brzom hodu čovjek je u jednoj minuti učinio 180 koraka. Kolika je snaga čovjeka koju je razvio pri hodu ako za svaki korak utroši rad od 30 J ?
14. Pokretnim stepenicama se savladava visinska razlika $h = 5,5 \text{ m}$, za vrijeme $t = 10 \text{ s}$. Ako na stepenicama može istovremeno da stoji najviše 14 ljudi, prosječne mase 60 kg , izračunati koliku snagu mora imati pokretački motor stepenica. ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$)
15. Pomoću strme ravni duge 10 m i visoke 144 cm podižemo teret od 400 N silom od 72 N . Koliki je stepen korisnog djelovanja strme ravni?
16. Automobil težak 15000 N jednolikom se kreće na usponu dugom 300 m i visinske razlike 30 m . Sila trenja između točkova i ceste je 500 N . Kolika je vučna sila automobila?
17. Pomičnim koturom podižu se dvije vreće cementa, svaka težine $490,5 \text{ N}$, na visinu 6 m . Koliki rad vrši radnik i uz koliku snagu, ako taj posao obavi za 12 s ?
18. Prema podacima sa slike izračunaj nepoznatu силу F па да полуга буде у ravnoteži.

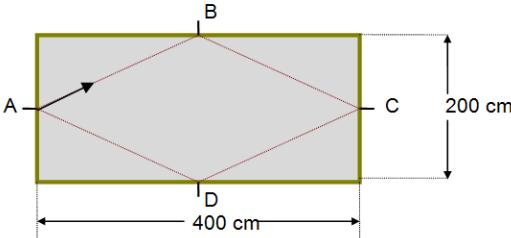


19. Na krajevima dvostrane poluge djeluju sile od 16 N i 80 N . Izračunaj i na zadatom crtežu odredi gdje se nalazi tačka oslonca poluge. (Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Mirićina 2007.)



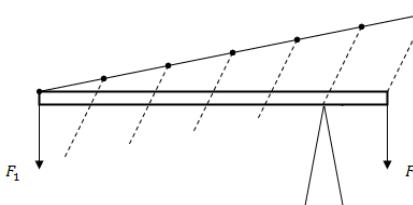


20. Automobil, mase 1,5 t, kreće se po putu uspona $u = 0,05$. Sila trenja iznosi $F_{tr} = 800$ N. Koliku vučnu silu treba da ostvari motor automobila da bi se ravnomjerno kretao uz ovaj uspon?
21. Na stolu za bilijar igrač udari kuglu u smjeru strelice (kao na slici) i saopšti joj brzinu $4\sqrt{5}$ m/s. Nakon koliko vremena će bilijarska kugla ponovno biti u tački A, ako pri svakom udaru o mantinelu, "izgubi" 75% svoje energije kretanja? (trenje zanemariti) (Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Zenica, 1997. godine)



Rješenja zadataka za samostalan rad:

1. $E_p = 600$ J; $E_k = 400$ J; 2. $A = 200$ J; $E_k = 50$ J; 3. $m_1gh_1 = m_2gh_2 \Rightarrow h_2 = 0,8$ m; 4. $E_{k1} = 4$ kJ; $E_{k2} = 9$ kJ; 5. $E_{k1} = 1800$ J; $E_{k2} = 14,4$ J; $\Delta E_k = 1785,6$ J; 6. $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $F = 4500$ N; 7. $A = 500$ J; $F = 5$ kN; 8. Prema zakonu održanja mehaničke energije, gravitaciona potencijalna energija loptice u najvišoj tački putanje jednaka je kinetičkoj energiji loptice koju je stekla kad joj je saopštена početna brzinav₀: $E_p = E_k = \frac{mv_0^2}{2} = 20$ J; 9. Ukupna mehanička energija lopte na visini $h = 3$ m u trenutku ispaljivanja vertikalno naniže mora biti jednak mehaničkoj energiji lopte pri odbijanju od ploče. Na visini $h = 3$ m mehanička energija lopte je $E_1 = mgh + \frac{mv_0^2}{2}$. Pri odbijanju od ploče lopta se penje do visine h_1 i tada ima samo gravitacionu potencijalnu energiju $E_2 = E_p = mgh_1$; kako je $E_1 = E_2 \Rightarrow mgh + \frac{mv_0^2}{2} = mgh_1$; odavde proizilazi da je $v_0 = \sqrt{2g(h_1 - h)} = 9,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ 10. $P = \frac{F \cdot s}{t} \Rightarrow F = \frac{P \cdot t}{s} = 117720$ N; $A = F \cdot s_1 = 117,72$ MJ; 11. $P_K = G \cdot v$; $P_U = \frac{P_K}{k_{kd}} = 1600$ W; 12. $G = 48$ kN; 13. $P = 90$ W; 14. $P = 4532,22$ W $\approx 4,5$ kW; 15. $A_u = F \cdot l$; $A_K = G \cdot h$; $k_{kd} = \frac{A_k}{A_u} = 80\%$; 16. $F = 2$ kN; 17. $A = 5886$ J; $P = 490,5$ W; 18. $F = 4G/3$; $F = 80$ N; 19. $F_1a = F_2b \Rightarrow a = \frac{F_2b}{F_1} = 5b$; Napomena: Za grafičko rješenje pogledati dijeljenje duži u dатој razmjeri.



Crtež uz zadatak 19.

20. $F = 875$ N;

21.

$$s_1^2 = \overline{AB}^2 \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2$$

$$s_1^2 = (2\text{m})^2 + (1\text{m})^2 = 5\text{m}^2$$

$$s_1 = \sqrt{5}\text{m}$$

$$s = 4s_1 \sqrt{5}\text{m}$$

$$E_{K(B)} = 25\% E_{K(A)}$$

$$\frac{mv_B^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv_A^2}{2} \quad | \cdot 8 \quad \frac{mv_C^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv_B^2}{2} \quad | \cdot 8 \quad \frac{mv_D^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv_C^2}{2} \quad | \cdot 8$$

$$4mv_B^2 = mv_A^2 \quad | :4m \quad 4mv_C^2 = mv_B^2 \quad | :4m \quad 4mv_D^2 = mv_C^2 \quad | :4m$$

$$v_B^2 = \frac{1}{4} v_A^2$$

$$v_C^2 = \frac{1}{4} v_B^2$$

$$v_D^2 = \frac{1}{4} v_C^2$$

$$v_B = \frac{v_A}{2} = \frac{4\sqrt{5} \frac{m}{s}}{2} \quad v_C = \frac{v_B}{2} = \frac{2\sqrt{5} \frac{m}{s}}{2} \quad v_D = \frac{v_C}{2} = \frac{\sqrt{5} \frac{m}{s}}{2}$$

$$v_B = 2\sqrt{5} \frac{m}{s} \quad v_B = \sqrt{5} \frac{m}{s} \quad v_D = 0,5\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

$$v_{A2} = \frac{v_B}{2} = \frac{0,5}{2} \sqrt{5} \frac{m}{s} = 0,25\sqrt{5} \frac{m}{s} \quad v^2 = v_0^2 - 2as$$

$$v_{A2} = 0,25\sqrt{5} \frac{m}{s} \quad 2as = v_0^2 - v^2 \quad a = \frac{v_0^2 - v^2}{2s}$$

$$v = v_0 - at$$

$$t = \frac{v_0 - v}{a}$$

$$t = \frac{v_0 - v}{\frac{v_0^2 - v^2}{2s}}$$

$$t = \frac{v_0 - v}{\frac{(v_0 - v)(v_0 + v)}{2s}}$$

$$t = \frac{2s}{v_0 + v}$$

Kako je

$$v_0 = v_A = 4\sqrt{5} \frac{m}{s} \wedge v = v_{A2} = 0,25\sqrt{5} \frac{m}{s}$$

a ukupan pređeni put s = 4s₁ = 4\sqrt{5}m

$$t = \frac{2 \cdot 4\sqrt{5}m}{4\sqrt{5} \frac{m}{s} + 0,25\sqrt{5} \frac{m}{s}} = \frac{8\sqrt{5}m}{4,25\sqrt{5} \frac{m}{s}} \approx 1,8$$

t ≈ 2s

5. Toplotne pojave

Pregled najvažnijih formula

Apsolutna temperatura (T) je temperatura koja se mjeri od absolutne nule (- 273,15 °C). Kelvinova skala ima iste podjele kao i Celzijusova, ali se one računaju od absolutne nule. Veza između temperature t izražene u °C i absolutne temperature T izražene u K:

$$T = 273 + t \Rightarrow t = T - 273,$$

Temperatura mržnjenja vode/topljenja leda: $t = 0^\circ C; T = 273K$.

Temperatura ključanja vode: $t = 100^\circ C; T = 373K$

Količina toplote koju tijelo primi pri zagrijavanju ili preda pri hlađenju:

$$Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \text{ za } t_2 > t_1, \text{ gdje je:}$$

m – masa tijela; c – specifični toplotni kapacitet tijela; $(t_2 - t_1)$ – promjena temperature

Mjerna jedinica za količinu topline: $[Q] = 1J$

Mjerna jedinica za specifični toplotni kapacitet: $[c] = 1 \frac{J}{kg \cdot K}$ ili $1 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$

Količina topline koja izvrši fazni prelaz (prelaz iz jednog agregatnog stanja u drugo) tvari mase m , na temperaturi faznog prelaza, data je izrazom: $Q = m \cdot q_i$,

gdje je q_i specifična toplota faznog prelaza (topljenja, očvršćavanja, isparavanja, kondenzovanja). Jedinica u SI je J/kg.

Razmjena unutrašnje energije tijela pri dodiru se vrši dok im se temperature ne izjednače, tj. $t_2 \rightarrow t_s \leftarrow t_1$, pri čemu je (pod uslovom da je sistem izolovan) $\Delta U_2 = \Delta U_1$, odnosno $Q_2 = Q_1$. Pri tome je:

$Q_2 = m_2 c_2 (t_2 - t_s)$ - količina topline koju preda toplije tijelo

$Q_1 = m_1 c_1 (t_s - t_1)$ - količina topline koju primi hladnije tijelo

$$m_2 c_2 (t_2 - t_s) = m_1 c_1 (t_s - t_1)$$

Temperatura smjese: $t_s = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$

Ako se miješaju dvije iste tvari različitih masa i temperatura, tada je $c_1 = c_2 = c$, pa je:

$$t_s = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$$

Dimenzijske tijela i njegova zapremina se zagrijavanjem povećavaju pa je:

$$l = l_0 (1 + \alpha \cdot t)$$

$$V = V_0 (1 + \gamma \cdot t),$$

gdje su α i γ koeficijenti termičkog širenja tijela.

Za čvrsto tijelo je: $\gamma = 3\alpha$

Zadaci za vježbu

1. Temperatura vazduha u dvorani, čije su dimenzije $20 \text{ m} \times 35 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ je 7°C . Pod pretpostavkom da samo vazduh apsorbuje toplotu, kolika količina toplice je potrebna za zagrijavanje vazduha u dvorani na 24°C ako se zna da je specifični toplotni kapacitet vazduha $728 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, a gustina vazduha $1,29 \text{ kg/m}^3$?

Rješenje:

$$\begin{aligned} a &= 20 \text{ m} \\ b &= 35 \text{ m} \\ c &= 4 \text{ m} \\ t_1 &= 7^\circ\text{C} \\ t_2 &= 24^\circ\text{C} \\ c_V &= 728 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \\ \rho &= 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ Q &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= mc_V(t_2 - t_1) \\ m &= \rho \cdot V; V = a \cdot b \cdot c \\ m &= \rho \cdot a \cdot b \cdot c \\ Q &= \rho \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c_V(t_2 - t_1) \\ Q &= 44,7 \text{ MJ} \end{aligned}$$

2. Komad mesinga mase 200 g , zagrijan na 100°C , stavimo u kalorimetar u kome se nalazi 65 g vode temperature 10°C . Temperatura vode u kalorimetru se poveća na 30°C . Koliki je specifični toplotni kapacitet mesinga?

Za specifični toplotni kapacitet vode uzeti $c_2 = 4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} m_1 &= 200 \text{ g} = 0,2 \text{ kg} \\ t_1 &= 100^\circ\text{C} \\ m_2 &= 65 \text{ g} = 0,065 \text{ kg} \\ t_2 &= 10^\circ\text{C} \\ c_2 &= 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \\ t_s &= 30^\circ\text{C} \\ c_1 &=? \end{aligned}$$

Količina toplice koju preda toplije tijelo:

$$Q_1 = m_1 c_1 (t_1 - t_s)$$

Količina toplice koju primi hladnije tijelo:

$$Q_2 = m_2 c_2 (t_s - t_2)$$

U stanju termodinamičke ravnoteže, kad nema gubitaka toplice na okolinu, važi da je $Q_1 = Q_2$, odnosno

$$m_1 c_1 (t_1 - t_s) = m_2 c_2 (t_s - t_2)$$

$$c_1 = \frac{m_2 c_2 (t_s - t_2)}{m_1 (t_1 - t_s)} = 390 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$$

3. Tijelo mase 2 kg , pušteno da pada sa visine 90 m , kretalo se jednakoubrzano i palo na tlo za 6 s . Odrediti: a) ubrzanje tijela, b) brzinu tijela pri udaru o tlo, c) energiju tijela pri udaru o tlo, d) količinu toplice koju su primili vazduh i tijelo zbog smanjenja mehaničke energije, e) silu otpora vazduha. Uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$. (*Republičko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike 1983.*)

Rješenje:

$$m = 2\text{kg}$$

$$t = 6\text{s}$$

$$\underline{h = 90\text{m}}$$

$$a = ?; v = ?, E = ?, Q = ?, F_O = ?$$

Ovo nije slobodan pad, tako da je

$$h = \frac{at^2}{2} \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v = a \cdot t = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

U trenutku udara o tlo

$$E = E_K = \frac{mv^2}{2} = 900 \text{ J}$$

Da nema otpora vazduha, tj. da je kretanje tijela slobodan pad, energija tijela pri udaru o tlo bila bi jednaka gravitacionoj potencijalnoj energiji tijela na visini h: $E = mgh = 1800 \text{ J}$

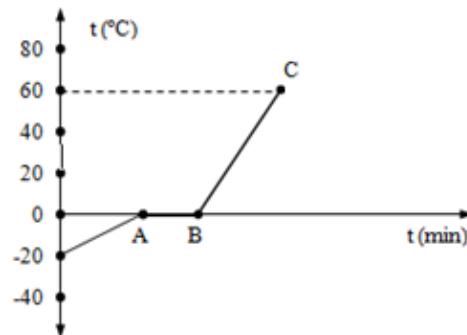
Tražena količina topline je $Q = \Delta E = 1800 \text{ J} - 900 \text{ J} = 900 \text{ J}$.

$$A = Q = 900 \text{ J}.$$

Kako je $A = F_O \cdot h$, to je tražena sila

$$F_O = \frac{A}{h} = 10 \text{ N}$$

4. Crtež prikazuje grafik promjene temperature određene količine leda pri njegovom ravnomjernom zagrijavanju.
- Koliko iznosi početna temperatura leda?
 - Na osnovu grafika objasniti koje se termičke pojave dešavaju tokom faza AB i BC.
 - Ako je masa leda 500 g, kolika je količina topline dovedena da se led, temperature -20°C , istopi i pređe u vodu temperature 60°C ? Specifični toplotni kapacitet leda $c_L = 2100 \text{ J/kgK}$, specifična toplota topljenja leda $q_t = 0,336 \text{ MJ/kg}$, specifični toplotni kapacitet vode $c_V = 4190 \text{ J/kgK}$



Rješenje:

- Početna temperatura je $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Tokom faze AB ledu se i dalje dovodi određena količina toplote, ali njegova temperatura se ne mijenja, ostaje i dalje $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tokom ove faze led se topi i prelazi u vodu (promjena agregatnog stanja) čija je temperatura takođe $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Tokom faze BC, pri daljem dovođenju određene količine toplote, voda se zagrijava od $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $60\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- Količina toplote potrebna da se led zagrije od $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (temperature topljenja):

$$Q_1 = mc_L[0 - (-20)]\text{ }^{\circ}\text{C} = 21000 \text{ J.}$$

Količina toplote potrebna da se desi fazni prelaz (topljenje leda):

$$Q_2 = m \cdot q_t = \mathbf{168000 \text{ J.}}$$

Količina toplote potrebna da se voda zagrije od $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $60\text{ }^{\circ}\text{C}$

$$Q_3 = mc_V(60 - 0)\text{ }^{\circ}\text{C} = 125700 \text{ J.}$$

Ukupna količina toplote

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 314700 \text{ J.}$$

- U čaši se nalazi količina vode $m_1 = 500 \text{ g}$, temperature $t_1 = 30\text{ }^{\circ}\text{C}$. U čašu se unese komad leda mase $m_2 = 50 \text{ g}$, čija je temperatura $t_2 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Kolika će biti temperatura vode u čaši kad se led istopi i uspostavi toplotna ravnoteža. Za specifični toplotni kapacitet vode uzeti $4200 \text{ J/kg}\text{C}$, a za specifičnutoplodu topljenja leda 335 kJ/kg . Sve gubitke toplote zanemariti.

Rješenje:

Količina toplote koja se dovede ledu da se istopi je $Q_1 = m_2 q_t$. Količina toplote koja se dovede vodi temperature $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ da se zagrije do temperature smjese je $Q_2 = m_2 c_V(t_s - 0\text{ }^{\circ}\text{C})$, dok je količina toplote koju predala voda u čaši za topljenje leda i za ovo zagrijavanje do uspostavljanja toplotne ravnoteže $Q_3 = m_1 c_V(t_1 - t_s)$.

Voda u čaši predaje količinu toplote potrebnu da se led istopi, te da se voda temperature $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ zagrije do temperature smjese:

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_1 + Q_2 \\ m_1 c_V(t_1 - t_s) &= m_2 c_V(t_s - 0\text{ }^{\circ}\text{C}) + m_2 q_t \\ m_1 c_V t_1 - m_1 c_V t_s - m_2 c_V t_s &= m_2 q_t \end{aligned}$$

Nakon sređivanja

$$\begin{aligned} m_1 c_V t_s + m_2 c_V t_s &= m_1 c_V t_1 - m_2 q_t \\ t_s &= \frac{m_1 c_V t_1 - m_2 q_t}{c_V(m_1 + m_2)} = 20,02\text{ }^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

- Soba, dimenzija $4 \text{ m} \times 4,5 \text{ m} \times 2,4 \text{ m}$, zagrijava se pomoću električne peći snage $P = 2,1 \text{ kW}$. Ako je gustina vazduha $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$, a njegov specifični toplotni kapacitet $c = 1,1 \text{ kJ/(kg} \cdot {^{\circ}\text{C}}\text{)}$, odredi vrijeme za koje će se vazduh u sobi zagrijati od temperature $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ do temperature $25\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 Q &= E = P \cdot t \\
 Q &= m \cdot c \cdot (t_2 - t_1) \\
 P \cdot t &= m \cdot c \cdot \Delta t \Rightarrow t = \frac{m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)}{P} \\
 m &= \rho \cdot V = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4 \text{ m} \cdot 4,5 \text{ m} \cdot 2,4 \text{ m} = 56,16 \text{ kg} \\
 t &= \frac{56,16 \text{ kg} \cdot 1100 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{C}} \cdot 10 \text{ }^\circ\text{C}}{2100 \text{ W}} = 294,17 \text{ s} \approx 5 \text{ min}
 \end{aligned}$$

7. Na automobil, mase 1,1 t, tokom kretanja djeluje stalna sila trenja čiji je intenzitet jednak 15% njegove težine. Koliku će količinu benzina, specifične toplove sagorijevanja $q_s = 46 \text{ MJ/kg}$, potrošiti motor automobila za povećanje njegove brzine od $v_1 = 10 \text{ m/s}$ do $v_2 = 72 \text{ km/h}$ na putu dužine 400 m? Stepen korisnog djelovanja motora je $k_{KD} = 80\%$, a ubrzanje Zemljine teže na mjestu kretanja automobila $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Rješenje:

Korisni rad motora automobila se vrši na savlađivanje trenja i na ubrzavanje automobila:

$$A_K = (F_{tr} + F) \cdot s = (0,15mg + m \cdot a) \cdot s$$

$$A_K = m \cdot s(0,15g + a)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2as \Rightarrow a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = 0,375 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Potrebna energija jednaka je uloženom radu:

$$Q = A_U = \frac{A_K}{k_{KD}} = \frac{m \cdot s(0,15g + a)}{k_{KD}}$$

Kako je

$$Q = m_{benzina} \cdot q_s,$$

tada možemo pisati da je

$$\frac{m \cdot s(0,15g + a)}{k_{KD}} = m_{benzina} \cdot q_s \Rightarrow m_{benzina} = \frac{m \cdot s(0,15g + a)}{k_{KD} \cdot q_s}$$

$$m_{benzina} = 0,022 \text{ kg}$$

8. Na $0 \text{ }^\circ\text{C}$ žica od čelika dugačka je 220 m, a žica od srebra 219,5 m. Pri kojoj će temperaturi obje žice biti jednako dugačke, ako je koeficijent linearog termičkog rastezanja čelika $1,06 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, a srebra $1,97 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$?

Rješenje:

$$\begin{aligned} t_o &= 0^\circ\text{C} \\ l_{oč} &= 220 \text{ m} \\ l_{os} &= 219,5 \text{ m} \\ \beta_{č} &= 1,06 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \\ \beta_s &= 1,06 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \\ t &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{č} &= l_s \\ l_{oč} (1 + \alpha_{č} \Delta t) &= l_{os} (1 + \alpha_{os} \Delta t) \\ \Delta t &= \frac{l_{oč} - l_{os}}{l_{os} \alpha_s - l_{oč} \alpha_{č}} \end{aligned}$$

$$\Delta t = 251^\circ\text{C}$$

$$t = t_0 + \Delta t = 0 + 251^\circ\text{C}; t = 251^\circ\text{C}$$

9. Puščano zrno mase 12 g pogodi aluminijsku ploču mase 500 g brzinom 800 m/s. Prije pogotka temperatura zrna i ploče su iznosili po 20°C . Kolika je zajednička temperatura zrna i ploče nakon pogotka? ($c_{zrna}=125 \text{ J/kg.K}$; $c_{Al}=880 \text{ J/kg.K}$) (*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Travnik 1996. godine*)

Rješenje:

$$\begin{aligned} m_1 &= 12 \text{ g} \\ m_2 &= 500 \text{ g} \\ t_1 &= 20^\circ\text{C} \\ v_0 &= 800 \text{ m/s} \\ c_1 = c_{zrna} &= 125 \text{ J/kg.K} \\ c_2 = c_{Al} &= 880 \text{ J/kg.K} \\ t_z &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= m_1 c_1 (t_z - t_1) & t_z - t_1 &= \frac{m_2 v_0^2}{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)} \\ Q_2 &= m_2 c_2 (t_z - t_1) & t_z &= \frac{m_2 v_0^2}{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)} + t_1 \\ E_k &= Q_1 + Q_2 & t_z &= \frac{0,012 \cdot (8 \cdot 10^2)^2}{2(0,012 \cdot 125 + 0,5 \cdot 880)} + 20 \\ E_k &= m_1 c_1 (t_z - t_1) + m_2 c_2 (t_z - t_1) & t_z &= 28,697^\circ\text{C} \\ E_k &= \frac{1}{2} m_2 v_0^2 & \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_0^2 = (t_z - t_1)(m_1 c_1 + m_2 c_2)$$

10. U dva potpuno jednaka suda nalaze se dvije različite mase vode: $m_1=1 \text{ kg}$ i $m_2=2 \text{ kg}$ čije se temperature zagrijavanjem povise redom za $\Delta T_1=10 \text{ K}$ i $\Delta T_2=8 \text{ K}$. Za koliko je veća promjena unutrašnje energije u jednom sudu? (Specifična toplota vode je 4186 J/kg.K). (*Opštinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Srbija 1986.g.*)

Rješenje:

Promjena unutrašnje energije tijela ΔU jednaka je količini toplote koju tijelo primi (ili otpusti). Količina topline koju primi tijelo m_1 je $Q_1 = m_1 c \Delta T_1$
 Količina topline koju primi tijelo m_2 je $Q_2 = m_2 c \Delta T_2$
 Vrijedi: $\Delta U_1=Q_1=41860 \text{ J}$, $\Delta U_2=Q_2=66976 \text{ J}$
 $\Delta U_X=\Delta U_2 - \Delta U_1=25116 \text{ J}$

11. U tri litra vode temperature 20°C spusti se komad leda mase $0,5 \text{ kg}$ čija je temperatura -15°C . Kolika je temperatura sistema ako se proces odvija u kalorimetru? Gubitke topline zanemariti . Specifična toplota vode je $4200 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, specifična toplota leda je $2100 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$, a toplota topljenja leda 335 kJ/kg . (*Međuopštinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Srbija, 1983.g.*)

Rješenje:

Komad leda promijeni (povisi) unutrašnju energiju ΔU_2 , a za isti iznos se promijeni (snizi) unutrašnja energija vode ΔU_1 .

$$Q_2 = m_2 c_2 \Delta t_2, \text{ kol.toplote koja se osloboodi da se led zagrije do } 0^\circ\text{C}$$

$$Q_3 = m_2 q, \text{ kol.toplote koja se osloboodi dok se led istopi na } 0^\circ\text{C}$$

$$Q_4 = m_2 c_2 (t_s - 0) \text{ kol.toplote da se led zagrije do temp.smjese}$$

$$\Delta U_2 = Q_2 + Q_3 + Q_4, \text{ promjena unutrašnje energije leda}$$

$$\Delta U_1 = Q_1 = m_1 c_1 (t_1 - t_s), \text{ promjena unutrašnje energije vode}$$

$$\Delta U_2 = \Delta U_1$$

$$m_1 c_1 (t_1 - t_s) = Q_2 + Q_3 + Q_4$$

Nakon uvrštanja i računanja dobije se

$$t_s = 4,7^\circ\text{C}$$

Zadaci za samostalan rad

1. Tijelo se zagrijalo od 288 K do 325 K. Za koliko se $^\circ\text{C}$ promijenila temperatura tijela ?
2. Akvarijum dimenzija: $a = 60 \text{ cm}$, $b = 40 \text{ cm}$ i $c = 50 \text{ cm}$ napunjen je do vrha vodom. Kolika količina toplote je potrebna da se voda u akvarijumu zagrije od 8°C do 24°C ? $c = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
3. Koliku količinu toplote preda okolini 1250 g vode dok se rashladi sa temperature 90°C do temperature 296 K ? $c = 4200 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$
4. Za koliko se promijeni temperatura komada olova mase $2,5 \text{ kg}$ ako se za zagrijavanje utroši količina toplote od $3,25 \text{ kJ}$? Promjenu temperature izraziti u K i u $^\circ\text{C}$. Specifični toplotni kapacitet olova je $c = 130 \text{ J/kgK}$.
5. U otvorenom sudu se nalazi 100 g leda temperature -10°C . Koliku količinu toplote treba dovesti ledu da pređe u vodu temperature 20°C ? Tačka topljenja leda iznosi 0°C , specifični toplotni kapacitet leda $c_L = 2100 \text{ J/kgK}$, specifična toplota topljenja leda $q_t = 0,336 \text{ MJ/kg}$, specifični toplotni kapacitet vode $c_v = 4190 \text{ J/kgK}$.
6. Na zagrijavanje mase od 5 kg vode utrošeno je $1780,75 \text{ kJ}$ toplotne energije. Ako je početna temperatura vode bila 288 K , kolika je temperatura vode nakon zagrijavanja? Smatrali da nema gubitaka toplote na okolinu. Sve potrebne konstante uzeti iz prethodnih primjera.
7. Komad željeza mase 10 kg zagrijan na 873 K ohladio se u 170 litara vode čija je početna temperatura bila 283 K . Kolika će biti temperatura smjese poslije hlađenja?
8. Pri rashlađivanju komada olova mase 100 g do temperature 32°C oslobođilo se 10 J toplote. Kolika je bila početna temperatura?
9. Koliko treba dodati hladne vode čija je temperatura 10°C u 50 litara vode čija je temperatura 100°C , da se dobije smjesa temperature 45°C ?
10. Veći kamen pada sa visine od 100 m . Za koliko će se zagrijati ako bi se njegova ukupna kinetička energija pretvorila u unutrašnju energiju? Za kamen uzeti $c = 1040 \text{ J/kgK}$.
11. Zapremina sobe je $V = 60 \text{ m}^3$. Kolika je količina toplote potrebna da se zagrije vazduh u sobi sa temperature 5°C do 25°C ? Specifični toplotni kapacitet vazduha je 1005 J/kgK , a gustina vazduha je $1,29 \text{ kg/m}^3$.
12. Kolika je potrebna količina vodene pare na atmosferskom pritisku , za topljenje $m = 50 \text{ kg}$ leda, čija je temperatura $t = -4^\circ\text{C}$. Specifična toplota topljenja leda je $c_L = 2,009 \text{ J/g}^\circ\text{C}$, a toplota topljenja $q_t = 334,88 \text{ J/g}$. Specifična toplota vode je $c_v = 4,186 \text{ J/g}^\circ\text{C}$, a toplota kondenzovanja vodene pare $q_k = 2260,44 \text{ J/g}$.

13. Koliko je gasa potrebno da se u bojleru zagrije 80 litara vode od 15°C do 60°C . Koeficijent korisnog djelovanja iznosi 60 %. Specifična toplota izgaranja gasa je $q=3,2 \cdot 10^3 \text{ J/m}^3$. (*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Gračanica, 1999. godine*)
14. U čaši se nalazi 200 g čiste vode na temperaturi 27°C . U tu čašu se stavi 27 g leda na 0°C . Kolika će biti temperatura smjese kada se led otopi? Gubitak toplote na zagrijavanje čaše zanemariti. Specifični toplotni kapacitet vode je $4,19 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$, specifična energija topljenja leda je $3,36 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$. (*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2000. godine*)

Rješenja zadataka za samostalan rad: **1.** $\Delta t = \Delta T = 64^{\circ}\text{C}$; **2.** $m = \rho \cdot V = 120 \text{ kg}$; $Q = 8064000 \text{ J}$; **3.** $Q = 351750 \text{ J}$

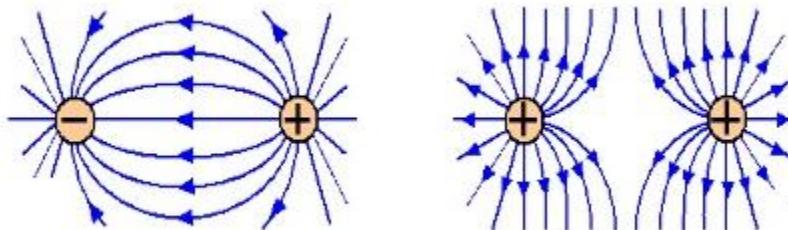
4. $\Delta T = 10 \text{ K}$; $\Delta t = 10^{\circ}\text{C}$; **5.** $Q_1 = mc_{leda}(0^{\circ}\text{C} - (-10^{\circ}\text{C}))$; $Q_2 = mq_{leda}$; $Q_3 = mc_{vode}(20^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C})$; $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 44080 \text{ J}$; **6.** $t = 100^{\circ}\text{C}$; **7.** $t_s \approx 14^{\circ}\text{C}$; **8.** $t = 32,7^{\circ}\text{C}$; **9.** $m = 78,6 \text{ kg}$; **10.** $\Delta t = 0,96 \text{ K}$; **11.** $Q \approx 1555,74 \text{ kJ}$; **12.** Za topljenje leda potrebna je količina toplote: $Q = mc_L(t_1 - t) + mq_t = 171,62 \times 10^5 \text{ J}$; Tu toplotu led dobije od vodene pare: $Q = m_1 q_k + m_1 c_v(t_k - t_1)$, $t_1 = 0^{\circ}\text{C}$, $t_k = 100^{\circ}\text{C}$, $m_1 = \frac{Q}{[q_k + c_v(t_k - t_1)]} \approx 7 \text{ kg}$; **13.** Za zagrijavanje vode potrebna je količina toplote $Q_1 = mc\Delta T$; Izgaranjem gasa dobija se količina toplote $Q_2 = qV$; Iskorištenje u grijajuču nije potpuno pa imamo: $Q_1 = \eta Q_2$; $mc\Delta T = \eta qV$; $V = \frac{mc\Delta T}{\eta q} = 0,79 \text{ m}^3$; **14.** Pogledati „Zadaci za vježbu“, zadatak br. 5:
 $Q_1 = m_1 c(t_1 - t_s)$; $Q_2 = m_2 q + m_2 c(t_s - 0^{\circ}\text{C})$; $Q_1 = Q_2$; $m_1 c(t_1 - t_s) = m_2 q + m_2 c(t_s - 0^{\circ}\text{C}) \Rightarrow t_s = \frac{m_1 ct_1 - m_2 q}{c(m_1 + m_2)} = 14,25^{\circ}\text{C}$



6. Elektrostatika

Pregled najvažnijih formula

Električno polje, linije električnog polja, Kulonov zakon



Količina naelektrisanja (naboja)

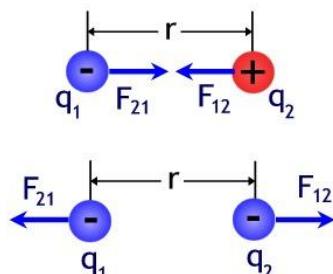
$$q = n \cdot e.$$

n – cijeli broj koji pokazuje koliko je tijelo steklo viška elektrona ako je negativno naelektrisano, odnosno koliko ima viška protona u odnosu na neutralno stanje ako je pozitivno naelektrisano

e – elementarna količina naelektrisanja (elementarni naboj) i iznosi $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Mjerna jedinica za količinu naelektrisanja (naboga) u SI je C (kulon).

Kulonov zakon:



$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

k – konstanta koja pokazuje zavisnost Kulonove sile od sredine u kojoj se naelektrisanja nalaze

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

ϵ – permitivnost sredine

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$$

ϵ_0 - permitivnost vakuuma i iznosi $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

ϵ_r - relativna permitivnost

$$k = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

Za vakuum

$$k_0 = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

Za svaku drugu sredinu



$$k = \frac{k_0}{\epsilon_r}$$

Prema tome, za vakuum je i Kulonova sila

$$F_0 = k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2},$$

dok je za svaku drugu sredinu

$$F = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{F_0}{\epsilon_r}.$$

Električni potencijal i napon. Rad u homogenom električnom polju

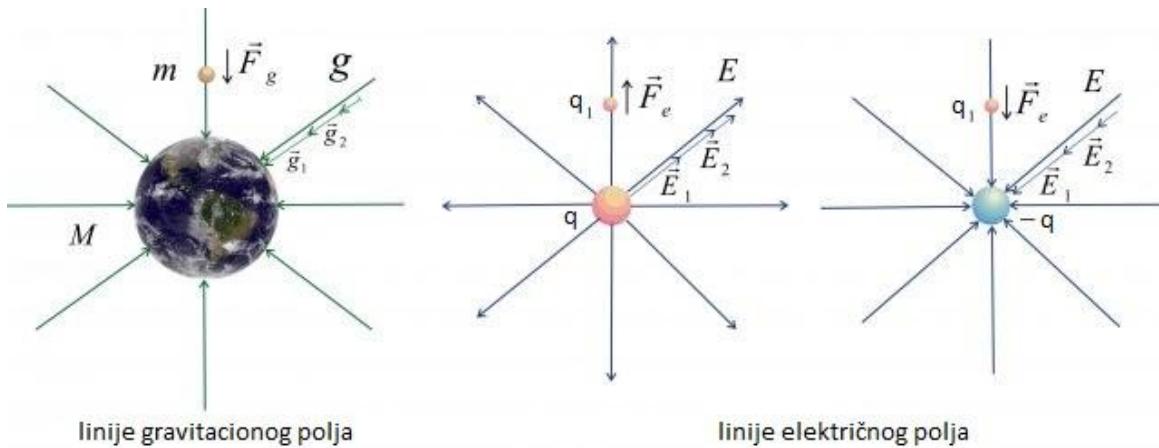
Jačina električnog polja izražena preko sile kojom to polje djeluje na određenu količinu nanelektrisanja postavljenu u neku tačku električnog polja:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

Odnosno u skalarnom obliku

$$E = \frac{F}{q}$$

Jedinica za jačinu električnog polja u SI je $\frac{N}{C}$.



Analogno gravitacionom polju, količina nanelektrisanja q_1 koja se nalazi u električnom polju tijela nanelektrisanog količinom nanelektrisanja q , zbog djelovanja električne sile, posjeduje potencijalnu energiju koju zovemo električna potencijalna energija:

$$E_p = k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r}$$

Električni potencijal polja je

$$V = \frac{E_p}{q_1};$$

$$\text{Kako je } E_p = k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r}$$



$$\text{možemo pisati da je } V = \frac{k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r}}{q_1}, \text{ odnosno}$$

$$V = k \cdot \frac{q}{r},$$

gdje je:

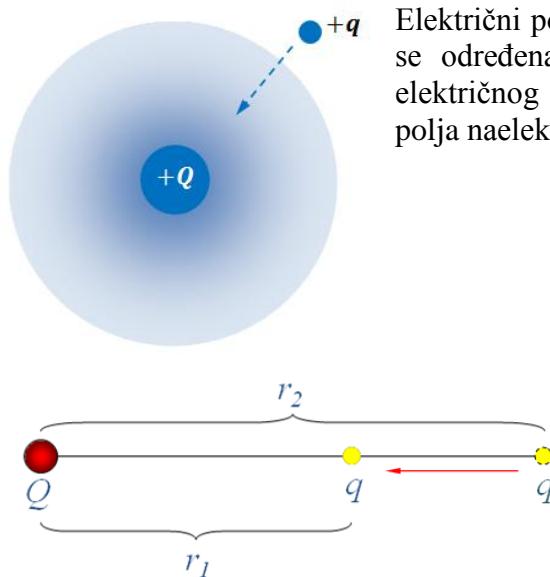
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r}$$

q – tačkasti naboј od kojeg polje potiče

r – rastojanje posmatrane tačke električnog polja od naboja q od kojeg polje potiče

Jedinica za električni potencijal u SI je **volt**, a označava se velikim slovom V:

$$1V = 1 \frac{J}{C}$$



Električni potencijal se može definisati i kao rad koji se izvrši da se određena količina nanelektrisanja q dovede iz tačke izvan električnog polja (iz beskonačnosti) u neku tačku električnog polja nanelektrisanja Q. Tada je električni potencijal te tačke polja:

$$V = \frac{A}{q}$$

$$A = \Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

$$A = k \cdot \frac{Q \cdot q}{r_1} - k \cdot \frac{Q \cdot q}{r_2}$$

$$A = k \cdot Q \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{ili}$$

$$A = \frac{Q \cdot q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Napon se definiše kao razlika električnih potencijala između dvije tačke električnog polja:

$$U = V_1 - V_2 = \frac{E_{p1}}{q} - \frac{E_{p2}}{q}$$

$$U = \frac{\Delta E_p}{q} = \frac{A}{q}$$

Odatle proizilazi da je $A = q \cdot U$

Jedinica za napon u SI je, kao i za električni potencijal, V (volt).

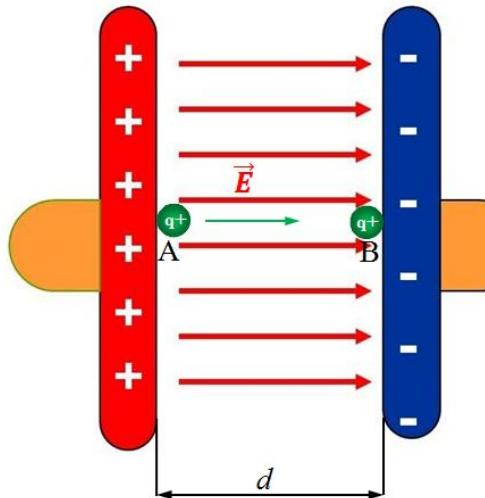
Električni potencijal sfernog nanelektrisanog provodnika računamo prema formuli

$$V = k \cdot \frac{q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q}{r},$$

gdje je r poluprečnik sfernog provodnika.



Odnos između rada, napona i jačine električnog polja



$$\begin{aligned} A &= F \cdot s \\ F &= E \cdot q; s = d \\ A &= E \cdot q \cdot d \\ A &= q \cdot U \\ \left. \begin{array}{l} A = E \cdot q \cdot d \\ A = q \cdot U \end{array} \right\} \Rightarrow q \cdot U = E \cdot q \cdot d \\ U &= E \cdot d \\ E &= \frac{U}{d} \end{aligned}$$

Odnos između količine naboja, napona i brzine kretanja nanelektrisane čestice u homogenom električnom polju

$$\begin{aligned} A &= q \cdot U \\ A &= \Delta E_K \end{aligned}$$

Za $v_0 = 0$

$$\Delta E_K = \frac{mv^2}{2}$$

$$q \cdot U = \frac{mv^2}{2}$$

Električni kapacitet provodnika. Kapacitet pločastog kondenzatora

Električni kapacitet provodnika

$$C = \frac{q}{V}$$

Jedinica za električni kapacitet u SI je **farad** (F).

Za sferni provodnik

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{q}{r}} = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r \cdot r,$$

gdje je r poluprečnik sfernog provodnika.

Kako je

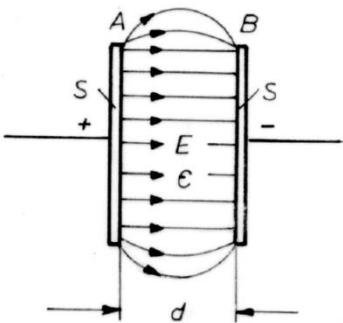
$$4\pi\epsilon_0\epsilon_r = \frac{1}{k},$$



za kapacitet sfernog provodnika može se pisati

$$C = \frac{r}{k}.$$

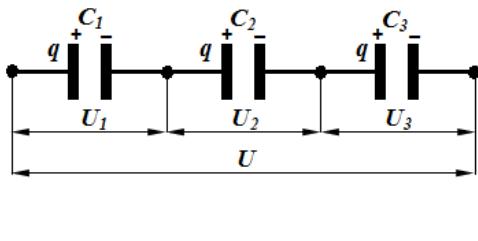
Kapacitet pločastog kondenzatora



$$\begin{aligned} C &= \frac{q}{U} \\ C &= \epsilon \cdot \frac{S}{d} \\ \epsilon &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \\ C &= \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{d} \\ \epsilon_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \end{aligned}$$

Vezivanje kondenzatora

1. Serijska veza

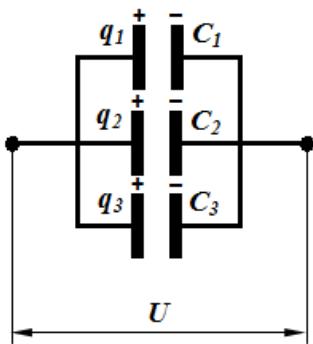


$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

2. Paralelna veza



$$U = U_1 = U_2 = U_3$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3$$

Energija električnog polja kondenzatora:

$$E = \frac{q \cdot U}{2}$$

Izražena preko električnog kapaciteta napona između ploča



$$E = \frac{CU^2}{2}$$

Izražena preko količine naboja i kapaciteta

$$E = \frac{q^2}{2C}$$

Zadaci za vježbu

1. Izračunaj intenzitet sile kojom međusobno djeluju dva nepokretna tačkasta naboja $q_1 = 4 \text{ nC}$ i $q_2 = 6 \text{ nC}$ na međusobnom rastojanju 2cm, ako se naboji nalaze:
 - a) u vakuumu,
 - b) u vazduhu ($\epsilon_r = 1$),
 - c) u destilovanoj vodi ($\epsilon_r = 81$)

Rješenje:

$$q_1 = 4 \text{ nC} = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_2 = 6 \text{ nC} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$r = 2 \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$F = ?$$

- a) Za vakuum

$$\begin{aligned} F_0 &= k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \\ F_0 &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2} \\ F_0 &= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \\ F_0 &= 54 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

- b) Za svaku drugu sredinu (koja nije vakuum):

$$F = \frac{F_0}{\epsilon_r}$$

Za vazduh se uzima da je $\epsilon_r = 1$, pa je

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_0}{1} = F_0, \text{ tj.} \\ F &= 54 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

Zaključak: Za vazduh možemo pisati da je $k = k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

- c) Za vodu:

$$\begin{aligned} F &= \frac{F_0}{\epsilon_r} = \frac{54 \cdot 10^{-5} \text{ N}}{81} \\ F &= 0,67 \cdot 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$



2. Dva tačkasta nanelektrisana se nalaze u vazduhu pa se zatim sredina između njih napuni čistom destilovanom vodom, čija je relativna dielektrička konstanta $\epsilon_r = 81$. Koliko puta se električna sila uzajamnog dejstva između ovih nanelektrisana smanji kada se ona nalaze u vodi?

Rješenje:

$$\epsilon_r = 81$$

$$\frac{F_0}{F} = ?$$

$$k = \frac{k_0}{\epsilon_r}$$

Nakon sređivanja:

$$\frac{F_0}{F} = \frac{\epsilon_r}{1} = 81$$

$$\frac{F_0}{F} = \frac{k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}{\frac{k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}{\epsilon_r}}$$

$$F_0 = k_0 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = \frac{k_0}{\epsilon_r} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

3. Kuglica mase $m = 8 \text{ g}$ nanelektrisana je količinom nanelektrisanja $q_1 = 98 \text{ nC}$. Kada se na visini h iznad kuglice postavi nanelektrisanje $q_2 = 1 \mu\text{C}$, dinamometar o kome visi kuglica pokazuje silu čiji je intenzitet $F = 73 \text{ mN}$. Kolika je visina h i kakav znak ima nanelektrisanje q_1 ?

Rješenje:

$$m = 8 \text{ g} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$q_1 = 98 \text{ nC} = 98 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_2 = 1 \mu\text{C} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$F = F_R = 73 \text{ mN} = 73 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$h = ?, q_2 = ?$$

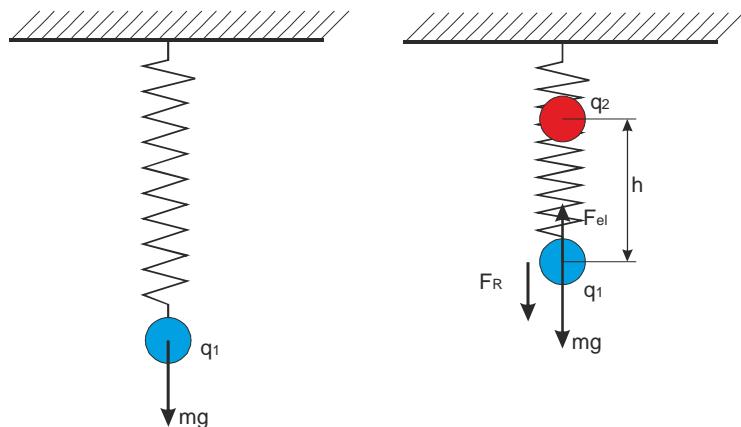
$$G = mg$$

$$G = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$G = 78,48 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$F = G - F_{el} \Rightarrow F_{el} = G - F$$

$$F_{el} = 5,48 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$



$$F_{el} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{h^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{F_{el}}};$$

$$h = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot 98 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{5,48 \cdot 10^{-3} \text{ N}}} ; h = \sqrt{160,95 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2}$$

$$h = \sqrt{16,095 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} ; h \approx 4 \cdot 10^{-1} \text{ m} \approx 40 \text{ cm} \approx 0,4 \text{ m}$$

Nanelektrisanja q_1 i q_2 su raznoimena jer se među njima javlja privlačna Kulonova sila.

4. Udaljenost između dvije jednakonanelektrisane kuglice, koje se nalaze u vakuumu, je 3 m a sila uzajamnog djelovanja 4 N. Koliku količinu nanelektrisanja posjeduje jedna kuglica? Izračunaj dielektričku propustljivost sredine u kojoj se nalaze pomenute kuglice kad je sila njihovog međudjelovanja 3 N.

Rješenje:

$$r = 3 \text{ m}$$

$$F_0 = 4 \text{ N}$$

$$k_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$$

$$F_1 = 3 \text{ N}$$

$$q = ?, \varepsilon_r = ?$$

$$F_0 = k_0 \cdot \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{F_0 \cdot r^2}{k_0}}; q = \sqrt{\frac{4 \text{ N} \cdot 9 \text{ m}^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}} \\ q = \sqrt{4 \cdot 10^{-9} \text{ C}^2} = \sqrt{0,4 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2}$$

$$q = 0,63 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

$$F_1 = \frac{k_0}{\varepsilon_r} \cdot \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{k_0 \cdot q^2}{F_1 \cdot r^2} \\ \varepsilon_r = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot (0,63 \cdot 10^{-4} \text{ C})^2}{3 \text{ N} \cdot 9 \text{ m}^2}$$

$$\varepsilon_r = \frac{4}{3} \text{ ili } \varepsilon_r = \frac{F_0}{F_1} = \frac{4N}{3N} = \frac{4}{3}$$

5. Na jednoj pravoj nalaze se dva tačkasta nanelektrisanja $q_1 = +6 \text{nC}$ i $q_2 = +2 \text{nC}$. Gdje je potrebno postaviti treće nanelektrisanje $-q_3$ da bi ono bilo u ravnoteži?

Rješenje:

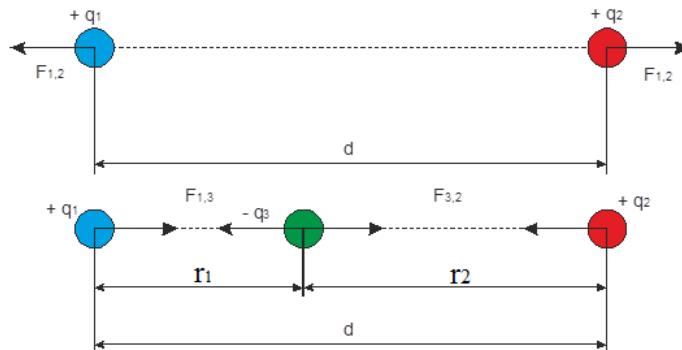
$$q_1 = +6 \text{nC} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_2 = +2 \text{nC} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$r_1 = ? ; r_2 = ?$$

$$F_{1,3} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_1^2}$$

$$F_{3,2} = k \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_2^2}$$



Uслов ravnoteže:

$$F_{1,3} = F_{3,2}$$

$$k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_1^2} = k \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{r_2^2} /: (k \cdot q_3)$$

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{6 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{r_1^2} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \text{ C}}{r_2^2}$$

$$r_2^2 \cdot 6 \cdot 10^{-9} C = r_1^2 \cdot 2 \cdot 10^{-9} C$$

$$3 \cdot r_2^2 = 1 \cdot r_1^2$$

$$r_1 = \sqrt{3 \cdot r_2^2}$$

$$r_1 = 1,73 \cdot r_2$$

$$d = r_1 + r_2$$

$$r_2 = d - r_1$$

$$r_1 = 1,73 d - 1,73 r_1$$

$$r_1 + 1,73 r_1 = 1,73 d; 2,73 r_1 = 1,73 d$$

6. Dva tačkasta nanelektrisana $q_1 = +20 \text{ nC}$ i $q_2 = -60 \text{ nC}$ nalaze se na rastojanju 1 m. Kolika Kulonova sila djeluje na nanelektrisanje $q_3 = +3 \text{ nC}$, koje se nalazi na sredini između nanelektrisanja q_1 i q_2 ? Nanelektrisana se nalaze u vazduhu.

Rješenje:

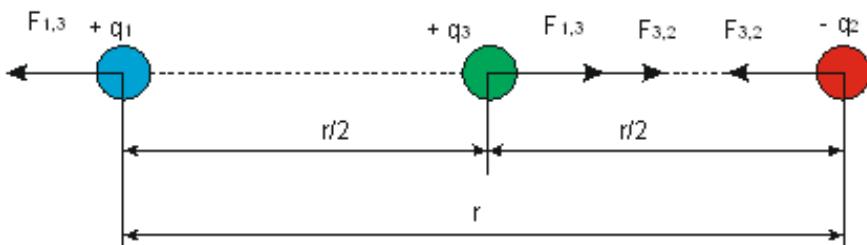
$$q_1 = +20 \text{ nC} = 20 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_2 = -60 \text{ nC} = 60 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_3 = +3 \text{ nC} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$F = ?$$



Sila između naboja q_1 i q_3 je odbojna (jer su istoimeni), a između naboja q_3 i q_2 je privlačna (jer su raznoimeni), tako da je rezultujuća sila jednaka zbiru ove dvije sile (prema slici):

$$F = F_{1,3} + F_{3,2} = k \frac{q_1 q_3}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} + k \frac{q_3 q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

Ako sve zajedničke faktore izdvojimo pred zagradu, dobije se jednačina:

$$F = F_{1,3} + F_{3,2} = \frac{k q_3}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} \cdot (q_1 + q_2) = \frac{4k q_3}{r^2} \cdot (q_1 + q_2)$$

$$F = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-9}}{1} \cdot 80 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

$$F = 8640 \cdot 10^{-9} \text{ N} = 8,64 \cdot 10^{-6} \text{ N} = 8,64 \text{ } \text{mN}$$

7. Tri tačkasta naboja $q_1 = +100 \text{ nC}$, $q_2 = -100 \text{ nC}$ i $q_3 = -300 \text{ nC}$ nalaze se na tjemenima jednakostraničnog trougla stranica $a = 20 \text{ cm}$. Odredi intenzitet, pravac i smjer rezultujuće električne sile kojom nanelektrisanje q_1 i q_2 djeluju na nanelektrisanje q_3 . Nanelektrisana se nalaze u vazduhu.



Rješenje:

$$q_1 = +100 \text{ nC}$$

$$q_2 = -100 \text{ nC}$$

$$q_3 = -300 \text{ nC}$$

$$a = 20 \text{ cm}$$

$$F_R = ?$$

Sile kojedjeluju na nanelektrisanje q_3 :

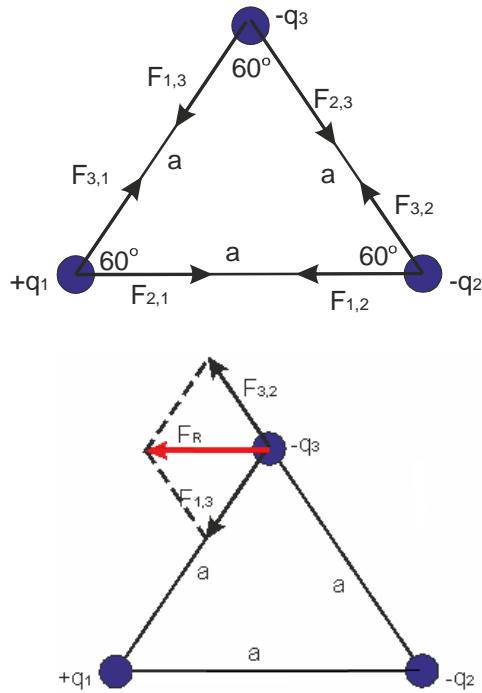
$$F_{1,3} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{a^2}$$

$$F_{1,3} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-9} \text{C} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(20 \cdot 10^{-2} \text{m})^2}$$

$$F_{3,2} = k \cdot \frac{q_2 \cdot q_3}{a^2}$$

$$F_{3,2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-9} \text{C} \cdot 300 \cdot 10^{-9} \text{C}}{(20 \cdot 10^{-2} \text{m})^2}$$

Očigledno je da je $F_{1,3} = F_{3,2} = 675 \cdot 10^{-5} \text{ N}$, ili $F_{1,3} = F_{3,2} = 6,75 \text{ mN}$



Konstrukcijom paralelograma sila vidi se da je ugao između sila $F_{3,2}$ i $F_{1,3}$ 120° , te da je rezultanta paralelna sa stranicom a trougla i da polovi ugao od 120° , odnosno da sa komponentnim silama $F_{3,2}$ i $F_{1,3}$ čini jedan jednakostranični trougao, iz čega proizilazi da je i $F_R = F_{1,3} = F_{3,2} = 6,75 \text{ mN}$.

8. Dva tačkasta nanelektrisanja od $-6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ i $+8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ nalaze se na izvjesnom rastojanju. Tačkasta nanelektrisanja dovedemo u neposredni kontakt i potom razdvojimo na isto rastojanje. Odrediti odnos intenziteta sile uzajamnog međudjelovanja nanelektrisanja prije i poslije njihovog dodira.

Rješenje:

$$q_1 = -6 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$q_2 = +8 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

$$\frac{F_1}{F_2} = ?$$

Prije spajanja

$$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

Kada se nanelektrisanja dovedu u kontakt, pa razdvoje, tada su nanelektrisana istom količinom nanelektrisanja

$$q = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{-6 \text{ nC} + 8 \text{ nC}}{2} = 1 \text{ nC}$$

Sila nakon dovođenja u neposredni kontakt: $F_1 = k \cdot \frac{q^2}{r^2}$

Odnos ovih sila je:



$$\frac{F}{F_1} = \frac{k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}}{k \cdot \frac{q^2}{r^2}} = \frac{q_1 \cdot q_2}{q^2}; \frac{F}{F_1} = \frac{6 \cdot 10^{-9} C \cdot 8 \cdot 10^{-9} C}{1 \cdot 10^{-18} C^2}; \frac{F}{F_1} = 48$$

9. Na kojoj će udaljenosti od tačkastog nanelektrisanja $q = 8 \mu\text{C}$, koje se nalazi u vazduhu, jačina električnog polja da iznosi $E = 10^5 \text{ N/C}$?

Rješenje:

$$q = 8 \mu\text{C}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

$$r = ?$$

$$E = k \frac{q}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{kq}{E}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \text{C}}{2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}}} = 6 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0,6 \text{ m}$$

10. Dva tačkasta nanelektrisanja $q_1 = +2 \text{ nC}$ i $q_2 = -4 \text{ nC}$ nalaze se na međusobnom rastojanju 60 cm u vazduhu. Koliki je rezultujući potencijal ovog polja u tački A koja se nalazi na sredini između ovih nanelektrisanja, a koliki u tački B koja se nalazi na udaljenosti 60 cm od nanelektrisanja q_2 ? Kolika je rezultujuća jačina električnog polja u ovim tačkama?

Rješenje:

$$q_1 = +2 \text{ nC} = +2 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$q_2 = -4 \text{ nC} = -4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$d = 60 \text{ cm} = 60 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$r_1 = d/2 = 30 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$r_1' = d + 60 \text{ cm} = 2d = 120 \text{ cm} = 120 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$r_2' = d = 60 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$V_A = ? ; V_B = ?$$

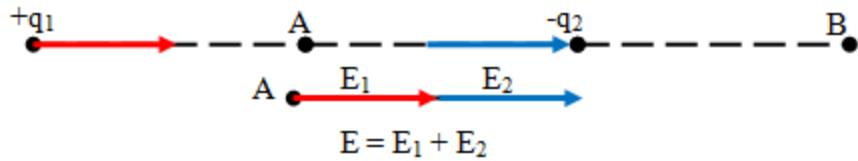
$$E_A = ? ; E_B = ?$$

$$V_A = V_1 + V_2 = k \frac{q_1}{r_1} + k \frac{q_2}{r_2} = k \frac{q_1}{\frac{d}{2}} + k \frac{q_2}{\frac{d}{2}}$$

$$V_A = \frac{k}{\frac{d}{2}} (q_1 + q_2) = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{60 \cdot 10^{-2} \text{ m}} (2 \cdot 10^{-9} \text{ C} + (-4 \cdot 10^{-9} \text{ C})) = -60 \text{ V}$$

$$V_B = k \cdot \frac{q_1}{2d} + k \cdot \frac{q_2}{d} = k \left(\frac{q_1}{2} + q_2 \right) = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{60 \cdot 10^{-2} \text{ m}} (1 \cdot 10^{-9} \text{ C} + (-4 \cdot 10^{-9} \text{ C})) = -45 \text{ V}$$

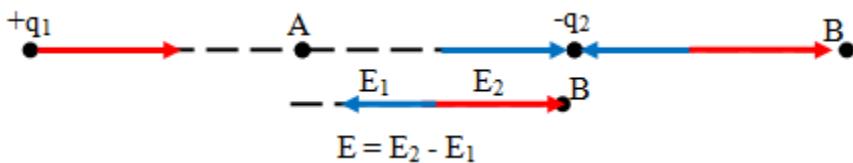
Za tačku A: Nanelektrisanje q_1 je pozitivno, pa je smjer polja od nanelektrisanja, a nanelektrisanje q_2 je negativno, pa je smjer jačine polja ka nanelektrisanju. Rezultujuća jačina polja se dobije zbirom jačina polja E_1 i E_2 .



$$E_A = E_1 + E_2 = k \frac{q_1}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} + k \frac{q_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4k}{d^2} (q_1 + q_2) = \frac{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{(60 \cdot 10^{-2} \text{m})^2} (2 \cdot 10^{-9} \text{C} + 4 \cdot 10^{-9} \text{C})$$

$$E_A = 600 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Za tačku B: Naelektrisanje q_1 je pozitivno, pa je smjer polja od naelektrisanja, a naelektrisanje q_2 je negativno, pa je smjer jačine polja ka naelektrisanju. Rezultujuća jačina polja se dobije razlikom jačina polja E_2 i E_1 .



$$E_B = E_2 - E_1 = k \frac{q_2}{(d)^2} + k \frac{q_1}{(2d)^2} = \frac{k}{d^2} \left(q_2 - \frac{q_1}{4} \right)$$

$$E_B = \frac{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}}{(60 \cdot 10^{-2} \text{m})^2} (4 \cdot 10^{-9} \text{C} - 0,5 \cdot 10^{-9} \text{C})$$

$$E_B = 87,5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

11. Elektron se ubrza u električnom polju pri čemu pređe potencijalsku razliku od $U = 100 \text{ kV}$. Kolika je energija elektrona?

Rješenje:

$$U = 100 \text{ kV}$$

$$E = ?$$

1 eV (elektronvolt) je jedinica energiju i može se definisati kao kinetička energija koju stekne elektron kada se u električnom polju ubrza razlikom potencijala od 1 V.

Prema tome, elektron ubrzan razlikom potencijala od 100 kV ima kinetičku energiju

$$E_k = 100 \text{ keV}.$$

Izražena u J (džulima), ta energija iznosi: $100 \text{ keV} = 100 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 16 \cdot 10^{-15} \text{ J}$

$$100 \text{ keV} = 16 \text{ fJ}$$

$$\text{Odnos između eV i J: } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 0,625 \cdot 10^{19} \text{ eV}$$

12. Koliku bi brzinu postigao elektron ubrzan razlikom potencijala od 0,27 kV?

Rješenje:

$$\begin{aligned} m_e &= 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ e &= 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ U &= 0,27 \cdot 10^3 \text{ V} = 2,7 \cdot 10^2 \text{ V} \\ v &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &= e \\ A &= e \cdot U \\ E_K &= \frac{m_e v^2}{2} \\ A &= E_K \\ e \cdot U &= \frac{m_e v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2,7 \cdot 10^2 \text{ V}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = \sqrt{0,96 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \\ v &= 0,98 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 9,8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \end{aligned}$$

13. Elektron se nađe u homogenom električnom polju jačine 0,1 kV/m. Izračunaj:

- a) Električnu silu koja djeluje na elektron,
- b) Ubrzanje elektrona,
- c) Vrijeme za koje će elektron stići brzinu $v = c/20$
- d) Kinetičku energiju elektrona u tom trenutku.

Početna brzina elektrona je 0, masa elektrona je $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg, naboj $q = 1,6 \cdot 10^{-9}$ C, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Rješenje:

$$E = \frac{F}{q} \Rightarrow F = E \cdot q = 100 \cdot 10^{-19} \text{ N} = 1 \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

$$F = m \cdot a ; a = \frac{F}{m_e}$$

$$a = \frac{1 \cdot 10^{-17} \text{ N}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} ; a = 0,11 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a = \frac{v}{t} \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{\frac{3}{20} \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,11 \cdot 10^{13} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} ; t = 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$E_K = \frac{m_e \cdot v^2}{2} = \frac{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(\frac{3}{20} \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2} = 0,10125 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 0,1 \text{ fJ}$$

14. Krećući se brzinom $v_0 = 10^6$ m/s elektron uleti u homogeno električno polje jačine $E = 600 \text{ N/C}$, u pravcu linija polja. a) Ako je smjer kretanja elektrona i linija polja isti, odredi dužinu pređenog puta elektrona na kojem će se on zaustaviti. Koliko vremena će trajati ovo zaustavljanje elektrona? b) Ako je smjer kretanja elektrona suprotan smjeru linija

polja, odredi dužinu pređenog puta elektrona na kojem će se njegova brzina udvostručiti.
Poslije koliko vremena će se ovo desiti?

Rješenje:

$$v_0 = 10^6 \text{ m/s}$$

$$E = 100 \text{ V/m}$$

$$\text{a) } s=? ; t=?$$

$$\text{b) } s=? ; t=?$$

- a) U prvom slučaju se radi o jednakousporenom pravolinijskom kretanju do zaustavljanja
($v_0 = 10^6 \text{ m/s}; v = 0$)

$$v^2 = v_0^2 - 2as$$

Kako je $v = 0$,

$$v_0^2 - 2as = 0 \Rightarrow s = \frac{v_0^2}{2a}$$

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{E \cdot e}{m_e}; a = 0,178 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$s = \frac{\left(10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 0,178 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$s = 2,81 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 28,1 \text{ mm}$$

$$v = v_0 - a \cdot t$$

Kako je $v = 0$, slijedi da je

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,178 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5,62 \cdot 10^{-8} \text{ s} = 56,2 \text{ ns}$$

- b) U drugom slučaju se radi o jednakoubrzanom pravolinijskom kretanju dok elektron ne dostigne brzinu $v = 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Ubrzanje je po iznosu jednako usporenju (jer ista sila djeluje na isto tijelo, odnosno česticu – elektron), tj. $a = 0,178 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(2v_0)^2 - v_0^2}{2a} = \frac{4v_0^2 - v_0^2}{2a} = \frac{3v_0^2}{2a}$$

$$s = 8,43 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 84,3 \text{ mm}$$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{2v_0 - v_0}{a} = \frac{v_0}{a} = 56,2 \text{ ns}$$

15. Kuglica radijusa 2 cm nabijena je količinom naboja od 66,7 nC. Na većoj razdaljini od nje postavljena je druga, veća kuglica, radijusa 5 cm na kojoj se nalazi količina naboja od 33,3 nC. Kolika količina naboja će proteći žicom koja spaja te kuglice? (Kapacitet kugle je $4\pi r\epsilon_0$; Naboј žice zanemariti!) (*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Zenica, 1997. godine*)



Rješenje:

$$r_1 = 2 \text{ cm}$$

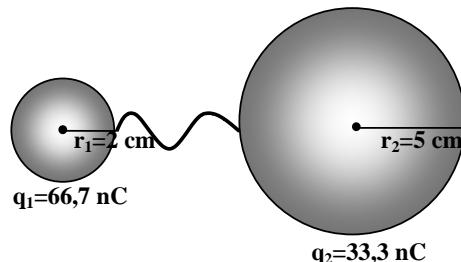
$$q_1 = 66,7 \text{ nC}$$

$$R_2 = 5 \text{ cm}$$

$$\underline{q_2 = 33,3 \text{ nC}}$$

$$\Delta q = ?$$

Ukupan kapacitet kugli kada se spoje provodnikom je $C = C_1 + C_2$ te je



$$C = 4r_1\pi\epsilon_0 + 4r_2\pi\epsilon_0 = 4\pi\epsilon_0(r_1+r_2) = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,02+0,05) = 4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,07 = 7,781 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 7,781 \text{ pF}$$

Ukupna količina elektriciteta je,

$$q = q_1 + q_2 = 66,7 \text{ nC} + 33,3 \text{ nC} = 100 \text{ nC}$$

Električni potencijal nakon spajanja kugli je

$$V = \frac{q}{C} = \frac{100 \cdot 10^{-9}}{7,781 \cdot 10^{-12}} = 12,8518 \cdot 10^3 \text{ V} = 12851,8 \text{ V}$$

Kako su obje kugle na istom potencijalu tada je

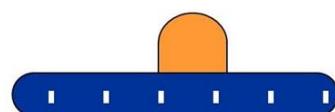
$$V = k \frac{q_1}{r_1} \quad i \quad V = k \frac{q_2}{r_2}$$

$$V = k \frac{q_1}{r_1} \Rightarrow q_1 = \frac{V \cdot r_1}{k} = \frac{12851,8 \cdot 0,02}{9 \cdot 10^9} = \frac{257,036}{9} \cdot 10^{-9} = 28,56 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

$$\Delta q = q_1 - q_2 = 66,67 \cdot 10^{-9} - 28,56 \cdot 10^{-9} = 38,11 \cdot 10^{-9} = 38,1 \text{ nC}$$

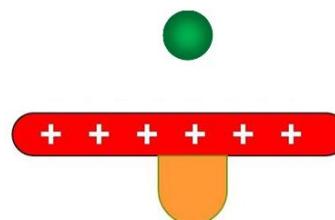
Prilikom spajanja kugli žicom će proteći **38,11 nC**.

16. Kakvo i koliko mora biti nanelektrisanje kuglice, mase 0,02 g da bi lebjjela između ravnih, paralelnih, nanelektrisanih ploča, ako je jačina polja između ploča 100 N/C?



Rješenje:

Kuglica mora biti pozitivno nanelektrisana. Tada gravitaciona sila, koja djeluje vertikalno naniže, uravnovežuje električnu silu koja djeluje vertikalno naviše. Prema tome, uslov ravnoteže je:



$$m \cdot g = E \cdot q \Rightarrow q = \frac{m \cdot g}{E}$$

$$q = \frac{0,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{100 \frac{\text{N}}{\text{C}}} = 0,001962 \text{ mC} = 1,96 \text{ nC}$$

17. Tri kondenzatora, čiji su kapaciteti $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$, vezani su serijski i spojeni na napon od 24 V. Izračunaj kapacitet baterije kondenzatora, količinu naboja i napone na svakom kondenzatoru.

Rješenje:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C_e = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_2 C_3 + C_1 C_3 + C_1 C_2} = 1 \mu\text{F}$$

Veza je serijska, pa važi da je

$$q_1 = q_2 = q_3 = q = C_e \cdot U; q = 24 \mu\text{C}$$

$$U_1 = \frac{q}{C_1} = 8 \text{ V}; U_2 = \frac{q}{C_2} = 4 \text{ V}; U_3 = \frac{q}{C_3} = 12 \text{ V}$$

Za serijsku vezu kondenzatora takođe važi da je $U = U_1 + U_2 + U_3$, $24 \text{ V} = 24 \text{ V}$.

18. Tri kondenzatora, čiji su kapaciteti $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = 6 \mu\text{F}$, $C_3 = 2 \mu\text{F}$, vezani su paralelno i spojeni na napon od 24 V. Izračunaj kapacitet baterije kondenzatora, količinu naboja na svakom kondenzatoru i ukupnu količinu naboja.

Rješenje:

$$C_e = C_1 + C_2 + C_3 = 12 \mu\text{F}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = U = 24 \text{ V}$$

$$q_1 = C_1 \cdot U = 96 \mu\text{C}$$

$$q_2 = C_2 \cdot U = 144 \mu\text{C}$$

$$q_3 = C_3 \cdot U = 48 \mu\text{C}$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 288 \mu\text{C}$$

ili

$$q = C_e \cdot U = 288 \mu\text{C}$$

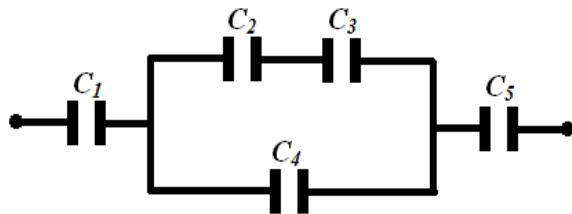
Kombinovana veza kondenzatora

Osim serijske i paralelne postoji i kombinovana veza kondenzatora. To je zapravo kombinacija serijske i paralelne veze kondenzatora. Kombinovana veza se rješava svedenjem na serijsku ili paralelnu. Tom prilikom svaka veza (i serijska i paralelna) zadržava svoja svojstva.



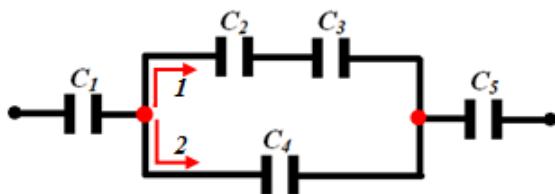
Primjer:

Izračunaj ekvivalentni kapacitet baterije kondenzatora na slici, ako je: $C_1 = 4 \mu\text{F}$, $C_2 = C_3 = 2 \mu\text{F}$, $C_4 = 3 \mu\text{F}$ i $C_5 = 6 \mu\text{F}$.



Rješenje:

Linije kojima su kondenzatori spojeni međusobno predstavljaju provodnike šematski prikazane.



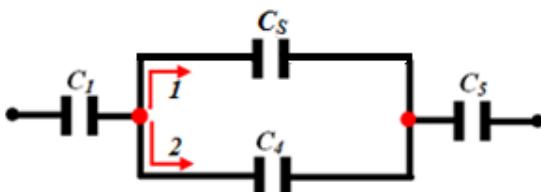
Mjesta gdje se provodnici granaju nazvat ćemo čvorovi (označeni crvenim tačkama). Na slici uočavamo grane 1 i 2. **Kombinovanu vezu prvo rješavamo između čvorova.**
Na grani 1 uočavamo serijski vezane

kondenzatore čiji su kapaciteti C_2 i C_3 .

Njihov ekvivalentni kapacitet označimo sa C_S i izračunajmo ga:

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{2 \mu\text{F}} + \frac{1}{2 \mu\text{F}}; C_S = 1 \mu\text{F}$$

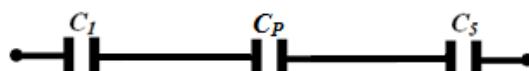
Kondenzatore kapaciteta C_2 i C_3 mijenjamo kondenzatorom kapaciteta C_S pa naša veza kondenzatora sada izgleda ovako



I dalje ostajemo pri tome da se veza rješava između čvorova, pa sada određujemo ekvivalentni kapacitet kondenzatora čiji su kapaciteti C_S i C_4 . Ovi kondenzatori su vezani paralelno pa je ekvivalentni kapacitet

$$C_P = C_S + C_4 = 1 \mu\text{F} + 3 \mu\text{F}; C_P = 4 \mu\text{F}$$

Konačno, kada kondenzatore kapaciteta C_S i C_4 zamijenimo kondenzatorom ekvivalentnog kapaciteta C_P , možemo kazati da smo **kombinovanu vezu kondenzatora sveli na serijsku** koja sada izgleda ovako



Ekvivalentni kapacitet zadane baterije kondenzatora je:

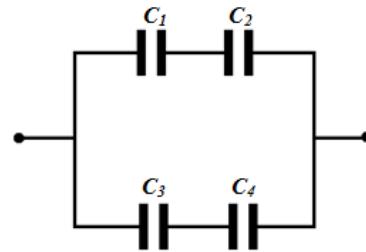
$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_P} + \frac{1}{C_5} = \frac{1}{4 \mu\text{F}} + \frac{1}{4 \mu\text{F}} + \frac{1}{6 \mu\text{F}} \\ C_e = 1,5 \mu\text{F}$$



19. Izračunaj ekvivalentni kapacitet baterije kondenzatora na slici ako je $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $C_2 = 3 \mu\text{F}$, $C_3 = 6 \mu\text{F}$ i $C_4 = 2 \mu\text{F}$.

Rješenje:

Prvo rješavamo seriju vezu kondenzatora C_1 i C_2 , zatim seriju vezu kondenzatora C_3 i C_4 i na kraju se ova kombinovana veza tako svela na paralelnu.



$$C_{1,2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 0,75 \mu\text{F}$$

$$C_{3,4} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} = 1,5 \mu\text{F}$$

$$C_e = C_{1,2} + C_{3,4} = 1,125 \mu\text{F}$$

20. Kondenzator kapaciteta $6 \mu\text{F}$ nanelektrisan je do napona 400 V i odvojen od izvora. Ovaj kondenzator se veže paralelno sa nenanelektrisanim kondenzatorom kapaciteta $10 \mu\text{F}$. Odredi koliki će biti napon i količina nanelektrisanja na svakom kondenzatoru pojedinačno poslije njihovog vezivanja.

Rješenje:

Količina nanelektrisanja se ne mijenja i može se izračunati na osnovu datih podataka:

$$q = C \cdot U = 2400 \mu\text{C} = 2,4 \text{ mC}$$

Nakon spajanja, promijenit će se napon na prvom kondenzatoru jer će se i spojeni kondenzator nanelektrisati i postojeća količina nanelektrisanja će se rasporediti na oba kondenzatora, ali ne jednako, već u zavisnosti od njihovih kapaciteta. Novonastali napon će biti isti na oba kondenzatora jer je veza paralelna:

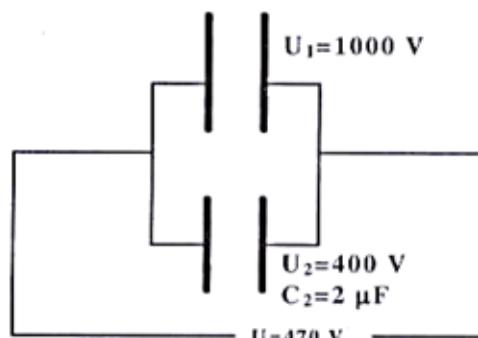
$$C_e = C_1 + C_2 = 16 \mu\text{F}$$

$$U = \frac{q}{C_e} = 150 \text{ V}$$

$$q_1 = C_1 \cdot U = 900 \mu\text{C} = 0,9 \text{ mC}$$

$$q_2 = C_2 \cdot U = 1500 \mu\text{C} = 1,5 \text{ mC}$$

21. Kondenzator nepoznatog kapaciteta nanelektrisan je do napona od 1000 V i spojen paralelno sa drugim kondenzatorom kapaciteta $2 \mu\text{F}$ na čijim je pločama napon od 400 V . Odredi kapacitet prvog kondenzatora, ako je poslije spajanja na oblogama uspostavljen napon od 470 V . Odredi ukupnu količinu nanelektrisanja.





Rješenje:

Prije spajanja:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_1 U_1 \\ q_2 &= C_2 U_2 = 800 \mu\text{C} \end{aligned}$$

$$q = q_1 + q_2$$

Nakon spajanja:

$$\left. \begin{array}{l} q' = C_1 U \\ q_2 = C_2 U \end{array} \right\} \quad \text{Napon na oba kondenzatora nakon spajanja je isti jer je veza paralelna.}$$

Ukupna količina nanelektrisanja se ne mijenja (zakon održanja količine nanelektrisanja), već se samo raspoređuje između kondenzatora, pa je:

$$q = q'$$

Odatle slijedi da je

$$C_1 U_1 + C_2 U_2 = C_1 U + C_2 U$$

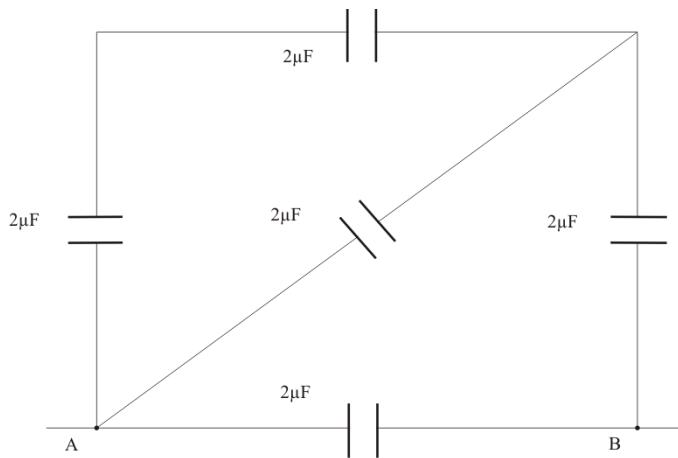
$$C_1 U_1 - C_1 U = C_2 U - C_2 U_2$$

$$C_1(U_1 - U) = C_2(U - U_2) \Rightarrow C_1 = \frac{C_2(U - U_2)}{U_1 - U} = 0,26 \mu\text{F}$$

$$q_1 = C_1 U_1 = 260 \mu\text{C}$$

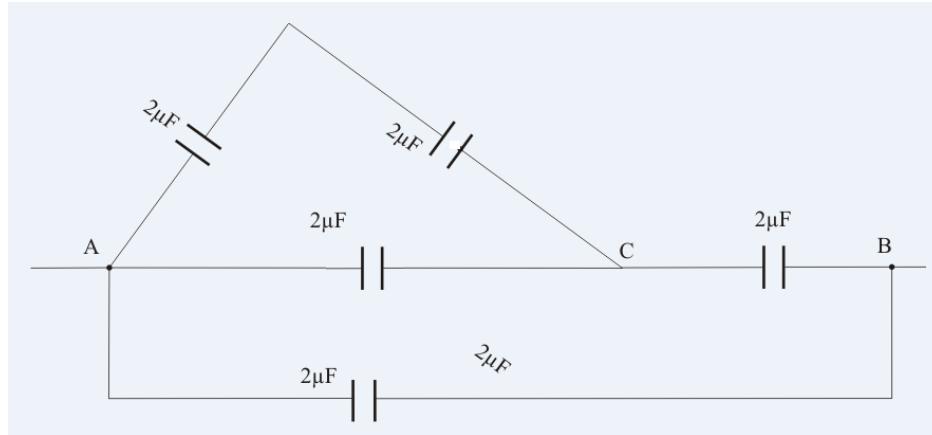
$$q = q_1 + q_2 = 1,06 \text{ mC}$$

22. Izračunati ekvivalentni kapacitet baterije kondenzatora, jednakih kapaciteta $C = 2 \mu\text{F}$, koji su vezani kao na slici. (*Opštinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, 1998. godine*)

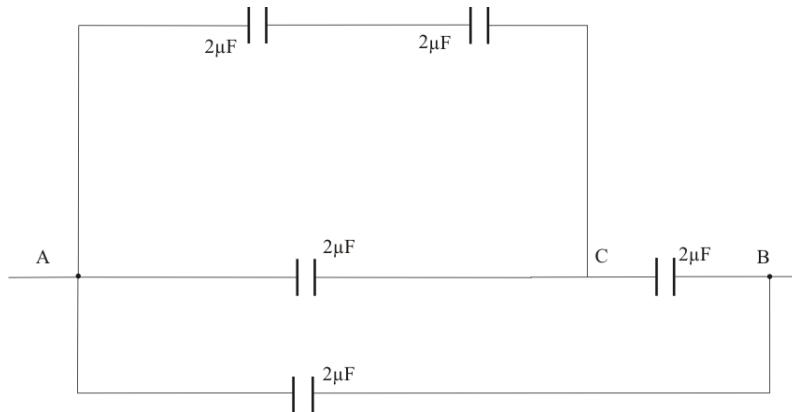


Rješenje:

Prikazana veza se može posmatrati i ovako



odnosno ovako



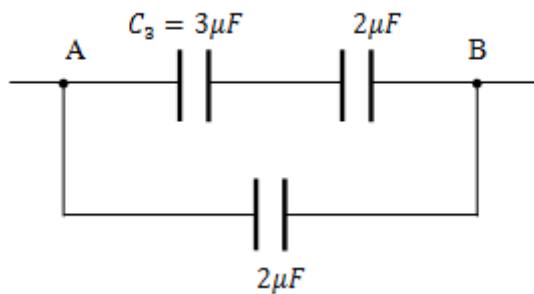
Sada lako uočavamo grupe serijski i paralelno vezanih kondenzatora. Prvo rješavamo gornju granu na kojoj imamo dva serijski vezana kondenzatora. Njihov kapacitet je

$$C_{1,2} = \frac{2 \mu F \cdot 2 \mu F}{2 \mu F + 2 \mu F} = 1 \mu F$$

Ova grupa od dva kondenzatora, čiji je ekvivalentni kapacitet $C_{1,2}$, vezana je paralelno sa kondenzatorom između tačaka A i C, pa je kapacitet te grupe

$$C_3 = 1 \mu F + 2 \mu F = 3 \mu F$$

Riješili smo čvor AC. Sada veza preostalih kondenzatora izgleda ovako



Sada rješavamo serijsku vezu kondenzatora C_3 i kondenzatora između čvorova C i B



$$C_4 = \frac{3 \mu\text{F} \cdot 2 \mu\text{F}}{3 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F}} = 1,2 \mu\text{F}$$

Konačno, kada smo sve grupe kondenzatora iznad čvorova A i B riješili zamijenili kondenzatorom C_4 , uočavamo da je sad taj kondenzator spojen paralelno sa jednim preostalim, pa možemo pisati da je ekvivalentni kapacitet baterije

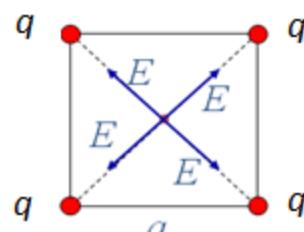
$$C_e = C_4 + 2\mu\text{F} = 3,2 \mu\text{F}$$

Zadaci za samostalan rad

1. Kako će se izmijeniti Kulonova sila kojom međusobno djeluju dva tačkasta nanelektrisanja ako se svako od njih poveća dva puta, a rastojanje među njima se također poveća dva puta?
2. Kolika je sila međudjelovanja dvije količine nanelektrisanja od po jedan kulan kad se one nalaze na rastojanju 1 km u vazduhu (što je približno jednako kao i u vakuumu).
3. Udaljenost između dvije jednakonanelektrisane kuglice koje se nalaze u vakuumu je 3 m, a sila međudjelovanja 40 N. Koliku količinu nanelektrisanja posjeduje jedna kuglica?
4. Dvije tačkaste količine nanelektrisanja $q_1=5 \text{ nC}$ i $q_2=8 \text{ nC}$ udaljene su tri metra. Između njih na udaljenosti 1 m od prve postavljena je treća količina nanelektrisanja $q_3=10 \text{ nC}$.

Odredi:

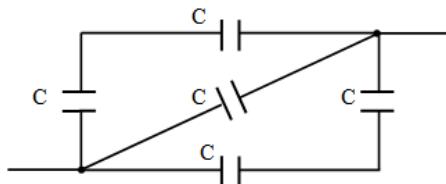
- a) silu kojom prva tačkasta količina nanelektrisanja djeluje na treću,
 - b) rezultantnu silu koja djeluje na treću tačkastu količinu nanelektrisanja
5. Dvije jednakomale kuglice obješene su na lakinim neistegljivim koncima jednakih dužina, po $l = 64 \text{ cm}$, o istu tačku. Kad se kuglice, čije su mase po 0,4 grama, nanelektrišu jednakim količinama istovrsnog nanelektrisanja odbiju se na četiri puta manje rastojanje od dužine jednog konca. Izračunaj količinu nanelektrisanja jedne kuglice.
 6. Elektron se nalazi u homogenom električnom polju i pod njegovim dejstvom se kreće ubrzano sa stalnim ubrzanjem od 10^{12} m/s^2 . Odrediti: a) jačinu električnog polja, b) brzinu koju ima elektron poslije 1 μs svog kretanja, ako je krenuo iz stanja mirovanja, c) rad sile polja na tom putu i d) razliku potencijala između početne i krajnje tačke te putanje. Masa elektrona je $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, a naboj elektrona je $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
 7. Koliki je električni potencijal na udaljenosti 1 nm od jezgre helija koja ima dva protiona? Kolika je potencijalna energija protona na toj udaljenosti od jezgre? ($\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N m}^2$)
 8. Četiri jednakapozitivna tačkasta naboja od 1 nC u vakuumu nalaze se u vrhovima kvadrata stranice 0,1 m. Kolika je jačina električnog polja u središtu kvadrata? Koliki je potencijal u središtu kvadrata?



9. Osam jednakih kapljica vode, svaka poluprečnika 1 mm i potencijala 1000 V, slijije se u jednu kap. Koliki je potencijal nastale kapi?
10. Dvije folije oblika kvadrata stranice 40 cm zalijepljene su na staklenu ploču debljine 4 mm jedna nasuprot drugoj. Kolika će se količina naboja skupiti na folije ako ih priključimo na napon 100 V? Relativna permitivnost stakla je 6.

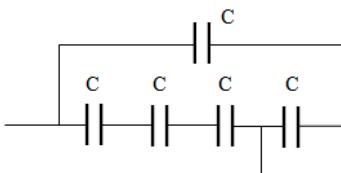


11. Dvije metalne kugle, poluprečnika 10 cm i 20 cm, nalaze se na međusobnoj udaljenosti znatno većoj od njihovih poluprečnika i međusobno su povezane tankom vodljivom žicom. Ako je naboј prve kugle 12 C, a druge 24 C, koliki je omjer električnog polja na površini prve i druge kugle?
12. Kolika je jačina homogenog električnog polja između ravnih, nanelektrisanih paralelnih ploča, međusobno udaljenih 1cm, ako je elektron, koji se kreće iz stanja mirovanja, potrebno $1,5 \cdot 10^{-8}$ s da bi došao s negativno nanelektrisane ploče na pozitivnu?
13. Kondenzator kapaciteta $8 \mu\text{F}$ nabijen je do napona 500 V, a zatim priključen na grijач koji se nalazi u posudi s vodom. Za koliko će porasti temperatura vode, ako je njezinamasa 1 g? Specifični toplinski kapacitet vode je $4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.
14. Dva kondenzatora spojena su serijski na napon 200 V. Odredite kapacitet drugog kondenzatora ako je kapacitet prvoga $4 \mu\text{F}$, a količina naboja na njemu $480 \mu\text{C}$.
15. Naboј provodljive sfere poluprečnika 0,02 m iznosi $4 \cdot 10^{-7}$ C. Odredi električni potencijal:
- U centru sfere.
 - U tački koja je 0,01 m udaljena od sfere.
 - Na površini sfere.
 - U tački 0,4 m udaljenoj od centra sfere.
- Sfera se nalazi u vazduhu. Elektrostatička konstanta u vakuumu iznosi $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.
(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Gračanica, 1999. godine)
16. Odredi ekvivalentni kapacitet baterije kondenzatora na slici ako svi kondenzatori imaju jednakе kapacitete po $1 \mu\text{F}$. (Općinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike TK 1978. godine)



17. Kondenzatori kapaciteta $C_1 = 3 \mu\text{F}$ i $C_2 = 6 \mu\text{F}$ vezani su redno i priključeni na napon $U = 600 \text{ V}$. Koliku kapacitivnost C_3 treba vezati paralelno kondenzatoru kapaciteta C_1 , da bi napon na kondenzatoru kapaciteta C_2 bio $U_2 = 360 \text{ V}$? (Opštinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike TK, 2012. godine)
18. Šema baterije 5 kondenzatora data je na slici. Kapaciteti svih kondenzatora su jednaki i iznose 3nF . Odredi kapacitet baterije. (Općinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, 1998. godine)

Slika uz zadatak 18.



19. Dva kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 35 \mu\text{F}$ i $C_2 = 15 \mu\text{F}$, vezani su serijski i priključeni na istoimeni napon od 40 V . Koliki je napon na prvom kondenzatoru?
20. Kondenzator kapaciteta 150 pF nabijen je na napon 2500 V . Ako neuzemljenu oblogu kondenzatora spojimo sa sfernim provodnikom, napon spadne na 2000 V . Koliki je



poluprečnik sfernog provodnika? Potrebne konstante: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$; $\epsilon_r = 1$
(Općinsko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, 2001.)

21. Pločasti kondenzator primi na svaku ploču naboј od 10 mC pri čemu napon između ploča poraste do 200 V . Odredi:

- Rad utrošen na naielktrisavanje kondenzatora.
- Električnu energiju u naielktrisanom kondenzatoru.
- Koeficijent korisnog djelovanja kondenzatora.
- Kapacitet kondenzatora.

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Gračanica, 1999. godine)

22. Dva tačkasta naboja nalaze se u vazduhu međusobno udaljena 10 cm .

- Na koju međusobnu udaljenost treba smjestiti te naboje u ulju, relativne dielektrične konstante $\epsilon_r = 5$, da bismo postigli jednaku uzajamnu silu djelovanja?
- Ako su količine elektriciteta $q_1 = q_2 = 1 \mu\text{C}$, popuniti tabelu i nacrtati grafički prikaz ovisnosti sile o udaljenosti naboja u vazduhu ($F_1(x)$) i ulju ($F_2(x)$).

(Pri crtanjtu dozvoljena je procjena vrijednosti unutar odabranih podioka.)

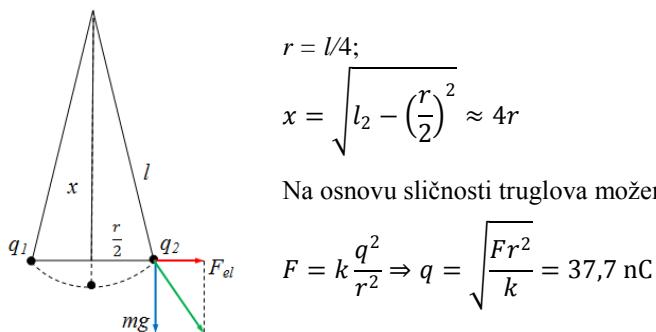
x(cm)	2	4	6	8	10
$F_1(\text{N})$					
$F_2(\text{N})$					

(Za vakuum dielektrična konstanta $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$, a električna konstanta $k_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$) *(Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2011.god.)*

Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. Sila međudjelovanja se neće promijeniti. 2. $F=9 \text{ kN}$; 3. Uputstvo:

$$q^2 = \frac{F \cdot r^2}{k}; q^2 = 4 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2, q = 2 \cdot 10^{-4} \text{ C}; 4. F_{1,3} = 450 \text{ N}, F_R = F_{1,3} - F_{2,3} = 270 \text{ N};$$

5.



$$r = l/4; \\ x = \sqrt{l^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} \approx 4r$$

$$\text{Na osnovu sličnosti truglova možemo pisati } \frac{F_{el}}{mg} = \frac{\frac{r}{2}}{x} \Rightarrow F_{el} = \frac{mgr}{2x} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$F = k \frac{q^2}{r^2} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k}} = 37,7 \text{ nC}$$

- $E = 5,69 \text{ V/m}; v = 10^6 \text{ m/s}; A = m_e \cdot \frac{v^2}{2} = 4,55 \cdot 10^{-19} \text{ J}; U = \frac{A}{e} = 2,84 \text{ V}; 7. V = k \frac{q}{r} = k \frac{2e}{r} = 2,88 \text{ V}; V = \frac{E_p}{e} \Rightarrow E_p = V \cdot e = 4,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}; 8. E = 0; V_R = 4 \text{ V} = 4k \frac{q}{r}; r = \frac{a\sqrt{2}}{2}; V_R = 509 \text{ V};$
- Uputstvo: $V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1}{r_1}; q_1 = 4\pi\epsilon V_1 R_1; q = 8q = 8,9 \cdot 10^{-10} \text{ C}; V = 8V_1; \frac{4}{3}r^3\pi = 8 \cdot \frac{4}{3}r_1^3\pi; R = 2R_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}; V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} = 4000 \text{ V}; 10. q = C \cdot U = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}; S = a^2; q = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{a^2}{d} = 2,12 \cdot 10^{-7} \text{ C}; 11. \text{Uputstvo: Potencijali kugli su jednaki, pa je } \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1} = 2; 12. E = 506 \text{ V/m}; 13. \text{Uputstvo: promjena unutrašnje energije vode jednaka je promjeni energije električnog polja } mc\Delta t = \frac{CU^2}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{CU^2}{2mc} = 0,24 \text{ °C}; 14. C_e = \frac{q}{U} = 2,4 \mu\text{F}; \text{Na osnovu formule za ekvivalentni kapacitet serijski vezanih kondenzatora nalazimo da je } C_2 = 6 \mu\text{F};$
- a) U centru sfere je: $V_1 = k_0 \frac{q}{r}; V_1 = 18 \cdot 10^4 \text{ V};$
- b) U tački $0,01\text{m}$ dalekoj od centra sfere električni potencijal je takođe: $V_2 = V_1 = 18 \cdot 10^4 \text{ V}$;
- c) Na površini sfere je takođe $V_3 = V_2 = V_1 = 18 \cdot 10^4 \text{ V}$;
- d) Potencijal u tački $0,4 \text{ m}$ udaljenoj od centra iznosi: $V_4 =$



$k_0 \frac{q}{D}; V_4 = 9 \cdot 10^3 \text{ V}$; **16.** $C_e = 2 \mu\text{F}$; **17.** Ukupna količina naboja baterije jednaka je količini naboja na kondenzatoru kapaciteta C_2 : $q = q_2 = C_2 U_2$; Zbir količina naboja na kondenzatorima kapaciteta C_1 i C_3 jednak je količini naboja na kondenzatoru kapaciteta C_2 : $q_1 + q_3 = q = C_2 U_2$

$$U_1 = U_3 = U - U_2 = 240 \text{ V}, C_1 U_1 + C_3 U_1 = C_2 U_2 \Rightarrow C_3 = \frac{C_2 U_2 - C_1 U_1}{U_1}, C_3 = \frac{6 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 360 \text{ V} - 3 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 240 \text{ V}}{240 \text{ V}}$$

$$C_3 = 6 \cdot 10^{-6} \text{ F}; C_3 = 6 \mu\text{F}$$

$$\mathbf{18.} C_e = 2 \mu\text{F}; \mathbf{19.} \text{ Veza je serijska pa je } q_1 = q_2 = q; C_e = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ F};$$

$$q = C_e \cdot U = 4,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}; U_1 = \frac{q}{C_1} = 12 \text{ V}$$

20. Ukupna količina nanelektrisanja na kondenzatoru je $q = C \cdot U = 375 \text{ nC}$; Količina nanelektrisanja na kondenzatoru nakon spajanja sa sfernim provodnikom je $q_1 = C \cdot U_1 = 300 \text{ nC}$;

Količina nanelektrisanja koja je prešla na sferni provodnik $q_2 = q - q_1 = 75 \text{ nC}$. Kapacitet sfernog provodnika je

$$C_1 = \frac{q_2}{V} = 0,0375 \text{ nF}; C_1 = 4\pi\epsilon r \Rightarrow r = \frac{C_1}{4\pi\epsilon} = 0,3374 \text{ m} = 33,74 \text{ cm}$$

$$\mathbf{21. a)} A = qU = 2 \text{ J}; \mathbf{b)} W = \frac{A}{2} = 1 \text{ J}; \mathbf{c)}$$

$$\eta = \frac{W}{A} = 0,5 = 50\% ; C = \frac{q}{V} = 50 \mu\text{F}$$

$$\mathbf{22. a)} \text{ Sila kojom naboji međudjeluju u vazduhu } F_1 = k \frac{q_1 q_2}{x^2}, \text{ Sila kojom}$$

$$\text{naboji međudjeluju u ulju } F_2 = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{x^2}; \text{ Iz uslova } F_1 = F_2 \text{ biće: } k \frac{q_1 q_2}{x_1^2} = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{x_2^2} \Rightarrow x_1^2 = \epsilon_r \cdot x_2^2 \Rightarrow$$

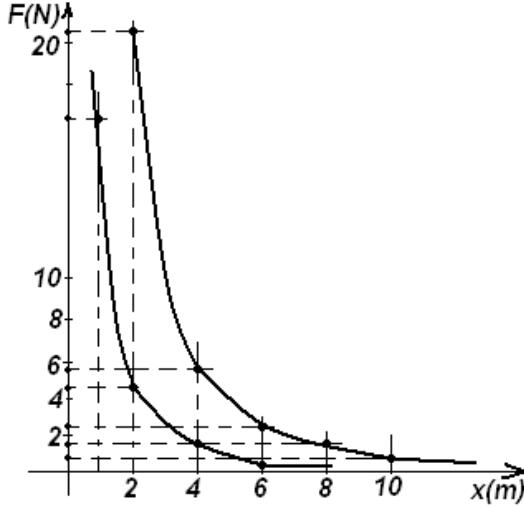
$$\Rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot x_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot 10 \text{ cm} = 4,47 \text{ cm}$$

$$\mathbf{b)} \text{ Za } x = 1 \text{ cm}; F_1 = k \frac{q_1 q_2}{x^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-6} \text{ C} \cdot 10^{-6} \text{ C}}{(10^{-2} \text{ m})^2} =$$

$$= 9 \cdot 10^{9-6-6+4} \text{ N} = 90 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{k}{\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{x^2} = \frac{1}{5} \cdot F_1 = 18 \text{ N}$$

x(cm)	2	4	6	8	10
F ₁ (N)	22,5	5,625	2,5	1,4	0,9
F ₂ (N)	4,5	1,125	0,5	0,28	0,18





7. Istosmjerna struja stalne jačine

Pregled najvažnijih formula

Jačina električne struje

$$I = \frac{q}{t}$$

Jedinica za jačinu električne struje u SI je amper (A).

$$1A = 1 \frac{C}{s} \Rightarrow 1C = 1 As$$

Jedinica koja se često koristi je 1 mAh

$$1 \text{ mAh} = \frac{3600}{1000} \text{ As} = 3,6 \text{ C}$$

Elektromotorna sila izvora (ems)

$$E = \frac{A}{q}$$

Jedinica za ems u SI je volt (V).

$$1V = 1 \frac{J}{C}$$

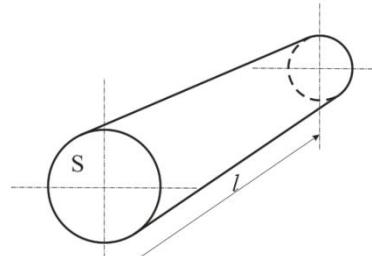
Pri serijskom vezivanju električnih izvora važi

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_N,$$

dok je pri paralelnom vezivanju električnih izvora

$$E_1 = E_2 = \dots = E_N = E.$$

Električni otpor provodnika



$$R = \rho \cdot \frac{l}{S},$$

gdje je ρ specifični električni otpor koji se izražava u Ωm ili $\frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$, l dužina provodnika koja se izražava u metrima (m) i S površina poprečnog presjeka provodnika koja se izražava u m^2 .

Jedinica za električni otpor u SI je om (Ω).

Za bakar specifični otpor iznosi

$$\rho_{Cu} = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m} = 0,017 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Električni otpor provodnika u zavisnosti od promjene temperature računa se prema obrascu: $R = R_0 \cdot (1 + \alpha t)$, gdje je R_0 - električni otpor provodnika na 0°C , t - temperatura na koju je zagrijan provodnik, a R - električni otpor provodnika na temperaturi t .

Veličinu koja pokazuje promjenu specifičnog otpora provodnika uslijed promjene njegove temperature za 1°C zovemo *temperaturni koeficijent otpora* α .



Omov zakon za dio strujnog kola

$$I = \frac{U}{R}.$$

Odavde je $U = I \cdot R$ i $R = \frac{U}{I}$.

Omov zakon za zatvoreno strujno kolo

$$I = \frac{E}{(R + r)},$$

gdje je E elektromotorna sila izvora, R spoljašnji otpor kola, a r unutrašnji otpor električnog izvora.

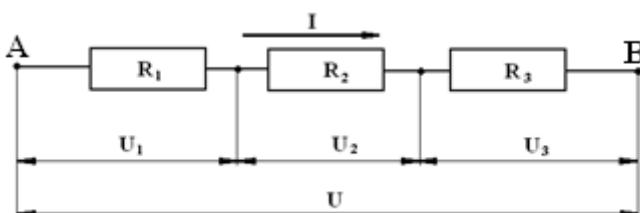
$$E = I(R + r) = IR + Ir = U + U_i,$$

gdje je U pad napona u vanjskom dijelu kola, dok je U_i pad napona na izvoru.

Možemo pisati i da je

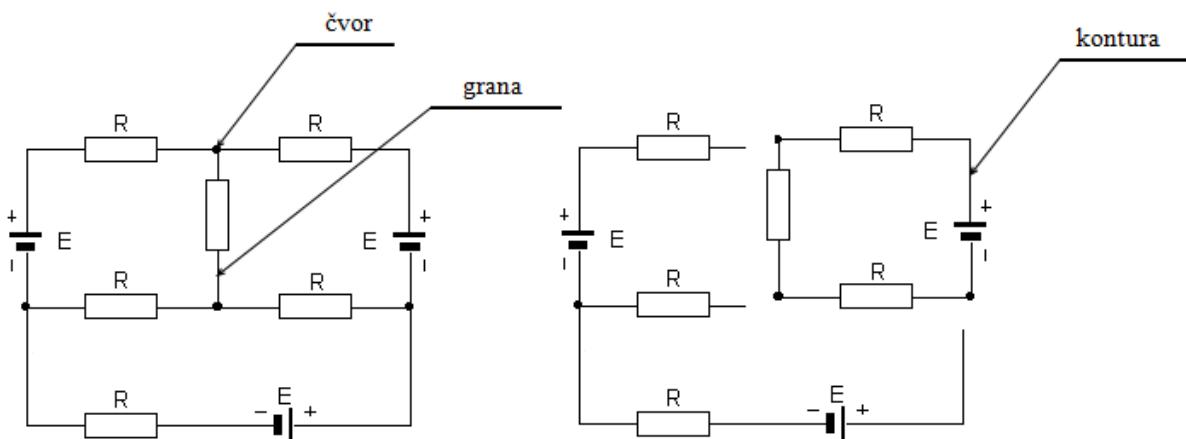
$$U = E - U_i.$$

Serijska veza otpornika



$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 = I_3 \\ U &= U_1 + U_2 + U_3 \\ R &= R_1 + R_2 + R_3 \end{aligned}$$

Složena strujna kola



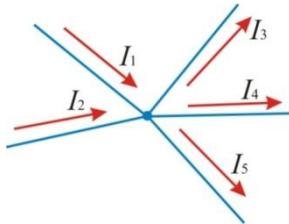
Čvor – mjesto u strujnom kolu gdje se sastaju najmanje dvije grane.

Grana – dio strujnog kola između dva čvora.

Strujna kontura (ili samo kontura) – zatvoreni strujni put koji sadrži barem neke elemente strujnog kola, odnosno jednostavno zatvoreno nerazgranato strujno kolo



1. Kirhofovovo pravilo: Zbir jačina svih struja koje ulaze u jedan čvor jednak je zbiru jačina svih struja koje iz tog čvora izlaze.

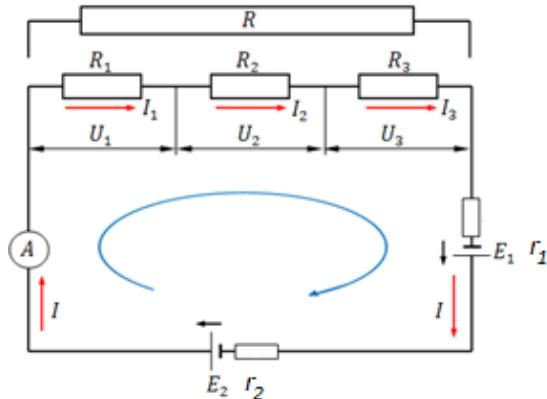


Za čvor prikazan na slici bilo bi: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4 + I_5$.

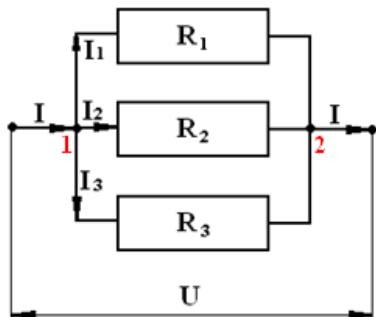
2. Kirhofovovo pravilo: Algebarski zbir svih ems u zatvorenoj strujnoj konturi jednak je zbiru proizvoda svih jačina struja i otpora u toj konturi.

Za strujnu konturu prikazanu na slici:

$$E_1 + E_2 = Ir_1 + Ir_2 + I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3$$



Paralelna veza otpornika



$$\begin{aligned} U &= U_1 = U_2 = U_3 \\ I &= I_1 + I_2 + I_3 \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{aligned}$$

Rad, energija i snaga električne struje

$$\begin{aligned} A &= q \cdot U \\ q &= I \cdot t \\ A &= U \cdot I \cdot t \\ \Delta E &= A = U \cdot I \cdot t \\ I &= \frac{U}{R}; A = \frac{U^2 \cdot t}{R} \\ U &= I \cdot R; A = I^2 \cdot R \cdot t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{A}{t} = \frac{U \cdot I \cdot t}{t} \\ P &= U \cdot I \\ \Delta E &= U \cdot I \cdot t \\ \Delta E &= P \cdot t \end{aligned}$$



Džul – Lencov zakon

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

$$P \cdot t = mc\Delta t$$

Zadaci za vježbu

- Koliko elektrona protekne žarnom niti sijalice za jednu sekundu, kada njome teče struja jačine 200 mA?

Rješenje:

$$t = 1 \text{ s}$$

$$I = 200 \text{ mA} = 0,2 \text{ A}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$n = ?$$

Prvo je potrebno izračunati količinu naboja koji protekne poprečnim presjekom provodnika tokom traženog vremena (1 s):

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I \cdot t$$

$$q = 0,2 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$$

$$q = 0,2 \text{ As} = 0,2 \text{ C}$$

$$q = n \cdot e \Rightarrow n = \frac{q}{e}$$

$$n = \frac{0,2 \text{ C}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}$$

$$n = 0,125 \cdot 10^{19} = 1,25 \cdot 10^{18}$$

- Kolika treba da bude dužina bakarnog provodnika, čija je površina poprečnog presjeka $1,7 \text{ mm}^2$, da bi njegov otpor iznosio 1Ω ?

Rješenje:

$$S = 1,7 \text{ mm}^2$$

$$\rho_{Cu} = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m} = 0,017 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$R = 1 \Omega$$

$$l = ?$$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S} \Rightarrow l = \frac{R \cdot S}{\rho}$$

$$l = \frac{1 \Omega \cdot 1,7 \text{ mm}^2}{0,017 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}} ; l = 100 \text{ m}$$

- U električnom kolu prikazanom na slici odredi pokazivanje ampermetra i voltmetra, te struju kratkog spoja ako je vanjski otpor $R = 5,5 \Omega$, unutrašnji otpor izvora $r = 0,5 \Omega$, a



ems izvora $E = 6 \text{ V}$. Otpor provodnika se zanemaruje. Koliki bi napon pokazivao voltmeter kada bi se priključio na polove izvora? Otpor voltmetra se također zanemaruje.

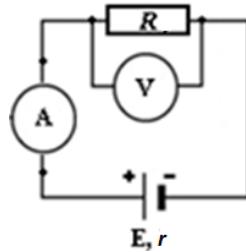
Rješenje:

$$R = 5,5 \Omega$$

$$r = 0,5 \Omega$$

$$E = 6 \text{ V}$$

$$I = ?, U = ?, I_{max} = ?$$



$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{6 \text{ V}}{5,5 \Omega + 0,5 \Omega}$$

$$I = 1 \text{ A}$$

$$U = I \cdot R_v = 1 \text{ A} \cdot 5,5 \Omega$$

$$U = 5,5 \text{ V}$$

Kada se polovi električnog izvora kratko spoje provodnikom zanemarljivog otpora, tada provodnikom teče električna struja maksimalne jačine (I_{max}) koju zovemo struja kratkog spoja:

$$I_{max} = \frac{E}{r} = 12 \text{ A}$$

Priklučen na polove izvora voltmeter bi pokazivao isti napon koji pokazuje i kada je priključen na krajeve otpornika, tj. pokazivao bi napon u vanjskom dijelu kola:

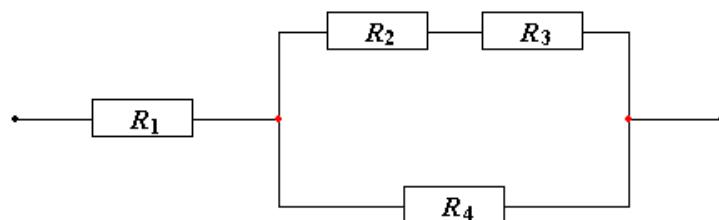
$$U = E - IR_v = 6 \text{ V} - 1 \text{ A} \cdot 0,5 \Omega$$

$$U = 5,5 \text{ V}$$

Kombinovana veza otpornika

Osim serijske i paralelne postoji i kombinovana veza otpornika. Ona predstavlja kombinaciju serijske i paralelne veze, a rješava se svođenjem na serijsku ili paralelnu vezu. I ovdje ćemo slijediti iste korake koje smo imali kada smo rješavali kombinovanu vezu kondenzatora.

4. Naći ekvivalentni otpor veze otpornika na slici ako su zadani sljedeći podaci: $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = 140 \Omega$, $R_3 = 60 \Omega$, $R_4 = 50 \Omega$.



Rješenje:

Uočimo čvorove (označeni su crvenim tačkama), te rješavajmo granu po granu između čvorova:

$$R_{2,3} = R_2 + R_3 = 140 \Omega + 60 \Omega$$

$$R_{2,3} = 200 \Omega$$



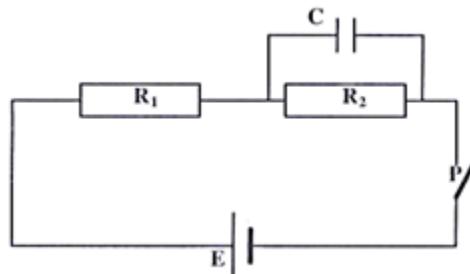
$$\frac{1}{R_{2,3,4}} = \frac{1}{R_{2,3}} + \frac{1}{R_4} = \frac{R_{2,3} + R_4}{R_{2,3} \cdot R_4} \Rightarrow R_{2,3,4} = \frac{R_{2,3} \cdot R_4}{R_{2,3} + R_4}$$

$$R_{2,3,4} = \frac{200 \Omega \cdot 50 \Omega}{200 \Omega + 50 \Omega}; R_{2,3,4} = 40 \Omega$$

$$R = R_1 + R_{2,3,4} = 100 \Omega + 40 \Omega$$

$$R = 140 \Omega$$

5. Na izvor elektromotorne sile 100 V i zanemarljive unutrašnje otpornosti redno su priključeni otpornici od 10Ω i 90Ω . Paralelno sa otpornikom od 90Ω priključen je kondenzator kapaciteta $2 \mu\text{F}$. Kolikom se količinom nanelektrisanja nanelektriše kondenzator poslije uspostavljanja kola struje, a kolika se količina toplote oslobođi u otporniku od 90Ω nakon isključenja kola struje?



Rješenje:

$$C = 2 \mu\text{F}$$

$$E = 100 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

$$\underline{R_2 = 90 \Omega}$$

$$\underline{q = ?}$$

$$q = C \cdot U_2$$

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1 \text{ A}$$

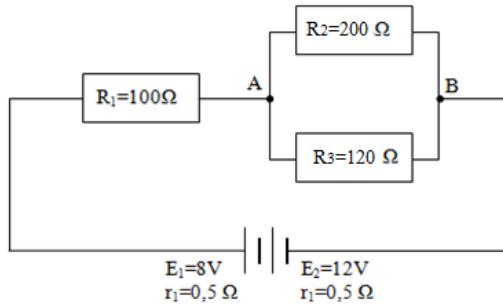
$$I = 1 \text{ A}$$

$$U_2 = I \cdot R_2 = 1 \text{ A} \cdot 90 \Omega; U_2 = 90 \text{ V}$$

$$q = 2 \mu\text{F} \cdot 90 \text{ V}; q = 180 \mu\text{C}$$

$$Q = E = \frac{q \cdot U_2}{2} = 8,1 \text{ mJ} \text{ ili } Q = \frac{C \cdot U_2^2}{2} = 8,1 \text{ mJ}$$

6. Za strujno kolo prikazano na slici odredi jačinu električne struje kroz otpornik R_3 i napon između prvog električnog izvora.



Rješenje:

Smjer ems se uviјek uzima od minusa ka plusu. Ovdje se ems sabiraju jer imaju iste smjerove, pa je jačina struje u kolu:

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R + r}$$

$$R = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 175 \Omega$$

$$r = r_1 + r_2 = 1 \Omega$$

$$I = \frac{20V}{176\Omega} = 0,1136 A$$

Ukupni napon na otpornicima je:

$$U = I \cdot R = 19,89 V$$

$$U_1 = I \cdot R_1 = 11,36 V$$

Napon na otpornicima R_2 i R_3 je isti jer su vezani paralelno:

$$U_2 = U - U_1 = 8,53 V$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = 0,0711 A = 71 mA$$

Napon između polova prvog izvora:

$$E_1 = U' + Ir_1 \Rightarrow U' = E_1 - Ir_1$$

$$U' = 8V - 0,1136 A \cdot 0,5 \Omega$$

$$U' = 8V - 0,0568 V = 7,9432 V$$

7. Reostat je načinjen od deset sijalica od kojih svaka ima otpor $R_i=400 \Omega$. a) Koji se najveći i koji najmanji otpor može dobiti kombinacijom ovih sijalica? b) Koliko sijalica treba spojiti paralelno da bi se dobio otpor $R=80 \Omega$?

Rješenje:

- a) Najveći je otpor u serijskoj vezi otpora:

$$n=10$$

$$R_i=400 \Omega$$

$$R_{max}=n \cdot R_i=10 \cdot 400 \Omega=4000 \Omega$$

Najmanji je otpor u paralelnoj vez i otpora:

$$R = \frac{R_i}{n} = \frac{400 \Omega}{10} = 40 \Omega$$

- b) $R=80\Omega$

$$n=?$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{80\Omega} \cdot \frac{1}{80\Omega} = \frac{n}{400\Omega} \Rightarrow n = \frac{400\Omega}{80\Omega} = 5$$

8. Na gradsku mrežu napona 220 V priključeno je 40 sijalica, a kroz svaku protiče struja 200 mA. Koliku snagu troše sve sijalice?

Rješenje:

$$U = 220 \text{ V}$$

$$n = 40$$

$$I_i = 200 \text{ mA} = 0,2 \text{ A}$$

$$P = U \cdot I$$

$$I = n \cdot I_i$$

$$P = ?$$

$$P = 220 \text{ V} \cdot 40 \cdot 0,2 \text{ A}$$

$$P = 1760 \text{ W}$$

9. Na koliki je napon priključeno električno kuhalo koje za pola sata oslobodi 792 kJ toplote kada kroz njega prolazi struja $I=2 \text{ A}$? Koliko bi se masi vode mogla povećati temperaturna za 20 K ako se zanemare gubici toplote?

Rješenje:

$$Q = 792000 \text{ J}$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$\Delta t = 20 \text{ K}$$

$$t = 1800 \text{ s}$$

$$U = ?$$

$$m = ?$$

Iz Džul – Lencovog zakona zakona :

$$Q = U \cdot I \cdot t \Rightarrow U = \frac{Q}{I \cdot t} = 220 \text{ V}$$

Iz

$$Q = m \cdot c \cdot t \Rightarrow m = \frac{Q}{c \cdot t} \approx 9,5 \text{ kg}$$

10. Kroz električnu lemilicu prolazi struja jačine 500 mA kada je priključena na napon $U=220 \text{ V}$.

- a) Koliko se topline oslobođi za pola sata? b) Kolika bi se masa vode mogla dobivenom toplinom zagrijati od 10°C na 60°C ako zanemarimo gubitke toplote?

Rješenje:

$$I = 0,5 \text{ A}$$

$$U = 220 \text{ V}$$

$$\Delta t = 50 \text{ K}$$

$$t = 1800 \text{ s}$$

$$\text{a)} Q = U \cdot I \cdot t = 198000 \text{ J}$$

$$\text{b)} m = \frac{Q}{c \cdot \Delta t} \quad c = 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$m \equiv 0,946 \text{ kg}$$

$$Q = ?$$

$$m = ?$$

11. Otpornici otpora 4Ω , 9Ω i 18Ω vezani su u seriju a na njih se nadovezuju paralelno spojeni otpornici otpora 12Ω , 15Ω i 20Ω . Kolika jačina struje teče cijelim strujnim krugom koji je spojen na akumulator napona 12 V?

Rješenje:

$$R_1 = 4 \Omega, R_2 = 9 \Omega, R_3 = 18 \Omega$$

(serijska veza)

$$R_4 = 12 \Omega, R_5 = 15 \Omega, R_6 = 20 \Omega$$

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

$$U = 12 \text{ V}$$

$$I = ?$$



(paralelna veza)

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}$$

$$I = \frac{U}{R_s + R_p} = 0,33 \text{ A}$$

12. Četiri otpornika otpora 5Ω , 6Ω , 10Ω , 30Ω međusobno su spojena i priključena na napon $4,5 \text{ V}$. a) Koliki je najveći, a koliki najmanji otpor?; b) Kolika je jačina struje u prvom i u drugom slučaju?

Rješenje:

$$R_1 = 5 \Omega, R_2 = 6 \Omega, R_3 = 10 \Omega, R_4 = 30 \Omega$$

$$U = 12 \text{ V}$$

- a) Najveći otpor je pri serijskoj vezi $R_{maks} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 51 \Omega$
Najmanji otpor je pri paralelnoj vezi $R_{min} = 2 \Omega$

b) $I_1 = \frac{U}{R_{maks}} = 0,09 \text{ A}$
 $I_2 = \frac{U}{R_{min}} = 2,25 \text{ A}$

13. Koliko mora biti duga žica od cekasa s poprečnim presjekom od $1,21 \text{ mm}^2$ za električnu grijalicu ako za 5 s razvija $4\,020 \text{ J}$ topline kad je priključena na napon 200 V ?

Rješenje:

$$S = 1,21 \text{ mm}^2$$

$$t = 5 \text{ s}$$

$$Q = 4\,020 \text{ J}$$

$$U = 200 \text{ V}$$

$$\rho = 1,1 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

$$l = ?$$

$$l = \frac{R \cdot S}{\rho}$$

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{4\,020}{5} = 804 \text{ W}$$

$$P = U \cdot I; \quad I = \frac{804 \text{ W}}{200 \text{ V}} \sim 4 \text{ A}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{200 \text{ V}}{4 \text{ A}} = 50 \Omega$$

$$l = \frac{50 \cdot 1,21 \Omega \cdot \text{mm}^2}{1,1 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}} = 55 \text{ m}$$

14. Električni grijач ukopčan na napon $U=220 \text{ V}$ treba da zagrije 704 g vode od 10°C na 100°C . Jačina struje iznosi 2 A .

- a) Koliko je vremena potrebno zagrijavati vodu?
b) Koliko će se električne energije potrošiti?

Rješenje:

$$U = 220 \text{ V}$$

$$m = 0,704 \text{ kg}$$

$$t_1 = 10^\circ\text{C}$$

$$t_2 = 100^\circ\text{C}; I = 2 \text{ A}$$

$$c = 4\,186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\text{a)} Q = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$$

$$Q = U \cdot I \cdot t$$

$$U \cdot I \cdot t = m \cdot c \cdot (t_2 - t_1)$$

$$t \approx 600 \text{ s} = 10 \text{ min}$$



$$\text{b) } E = U \cdot I \cdot t = 220 \cdot 2 \cdot 600 \text{ VAs} = 264 \text{ kJ}$$

$$E = \frac{264 \text{ 000}}{3600} \text{ Wh} = 73,33 \text{ Wh} = 0,073 \text{ kW}$$

15. Kad se dva otpornika vežu redno, tad je ukupni otpor $R_r = 50 \Omega$, a kad se vežu paralelno, tad je ukupni otpor $R_p = 12 \Omega$. Kolike su vrijednosti otpora ovih otpornika?

Rješenje:

$$R_r = 50 \Omega$$

$$R_p = 12 \Omega$$

$$R_1 = ?, R_2 = ?$$

$$R_r = R_1 + R_2 \dots \dots (1)$$

$$R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \dots \dots (2)$$

Iz jednačine (1) slijedi da je

$$R_1 = R_r - R_2 \dots \dots (1')$$

Ovo uvrštavamo u (2)

$$R_p = \frac{(R_r - R_2) \cdot R_2}{R_r - R_2 + R_2}; R_p = \frac{R_r R_2 - R_2^2}{R_r} / \cdot R_r$$

$$R_p \cdot R_r = R_r R_2 - R_2^2$$

Uvodimo smjene jer se dobila kvadratna jednačina. Tako ćemo umjesto R_r i R_p pisati njihove vrijednosti bez jedinica, a umjesto nepoznate R_r ćemo pisati x . Dobije se kvadratna jednačina oblika:

$$12 \cdot 50 = 50x - x^2$$

Odnosno, kvadratna jednačina izgleda ovako:

$$x^2 - 50x + 600 = 0$$

$$x^2 - 30x - 20x + 600 = 0$$

$$x(x - 30) - 20(x - 30) = 0$$

$$(x - 30)(x - 20) = 0$$

$$x_1 - 30 = 0 \Rightarrow x_1 = 30$$

$$x_2 - 20 = 0 \Rightarrow x_2 = 20$$

Zaključujemo da su za otpornik R_2 moguća dva rješenja i to 30Ω i 20Ω

Vrijednost otpora R_1 nalazimo iz jednačine 1', pa su i tu moguća dva rješenja.

$$R_1 = R_r - R_2 = 50 \Omega - 30 \Omega = 20 \Omega$$

ili

$$R_1 = R_r - R_2 = 50 \Omega - 20 \Omega = 30 \Omega$$

16. Električni rešo snage $P_R = 500 \text{ W}$ vezan je redno sa nepoznatim potrošačem, a priključeni su na napon 200 V . Izračunati otpor rešoa R_R i snagu nepoznatog potrošača, ako se zna da na krajevima rešoa vlada napon $U_R = 80 \text{ V}$.

Rješenje:

$$P_r = \frac{U_r^2}{R_r} \Rightarrow R_r = \frac{U_r^2}{P_r} = 12,8 \Omega$$

Napon na nepoznatom potrošaču:

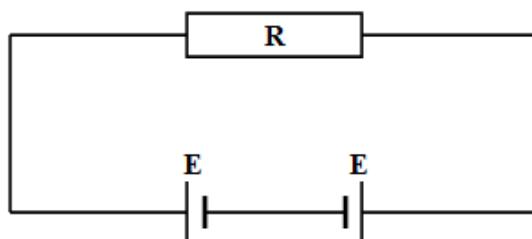
$$U_X = U - U_r = 120 \text{ V}$$

Jačina struje je ista kroz oba potrošača jer je veza serijska, pa ćemo je izračunati na osnovu podataka za rešo:

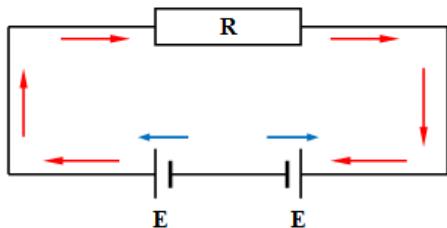
$$I = \frac{U_r}{R_r} = 6,25 \text{ A}$$

$$P_x = U_x \cdot I = 120 \text{ V} \cdot 6,25 \text{ A} = 750 \text{ W}$$

17. Dvije baterije jednakih emf od po 4,5 V i otpornik otpora 5Ω vezani su u kolo kao na slici. Odredi jačinu struje kroz kolo. Unutrašnji otpor baterija je zanemarljiv.



Rješenje:



Crvene strlice označavaju smjer kruženja po kolu struje, a plave označavaju smjer *ems*. Prema Drugom Kirhofovom pravilu možemo pisati

$$E - E = IR$$

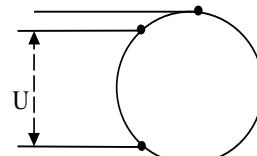
$$0 = IR \Rightarrow I = 0$$

19. Provodnik u obliku prstena uključen je u kolo kojim teče električna struja jačine 6 A. Spojevi (kontakti) dijele dužinu provodnika (kao na slici) u odnosu 1:2. Pri tome se u provodniku razvije snaga struje od 0,108 kW.

Izračunati:

18.
- a) Koliki je otpor provodnika?
 b) Kolika snaga struje se razvije kada spojevi polove dužinu provodnika?

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Zenica, 1997. godine)



18.



Rješenje:

$$I=6 \text{ A}$$

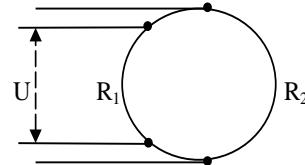
$$\underline{P_1=0,108 \text{ kW}=108 \text{ W}}$$

$$R=? \quad P_2=?$$

Ako se posmatra spoj na slici u prvom slučaju otpori su vezani paralelno u omjeru 1:2, te je

$$R_1 = \frac{R}{3} \quad \text{i} \quad R_2 = \frac{2R}{3}$$

Na obruču se razvije snaga $P_1=R_e I^2$ odakle se dobije da je ekvivalentni otpor $R_e=3 \Omega$.



Pošto je

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{R}{3} \cdot \frac{2R}{3}}{\frac{R}{3} + \frac{2R}{3}} = \frac{\frac{2R^2}{9}}{\frac{3R}{3}} = \frac{2}{9} R \quad R = \frac{9 \cdot R_e}{2} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5 \Omega$$

b) Ako kontakt postavimo dijametralno onda je $R_1=R_2=\frac{R}{2}$ te je pri paralelnoj vezi

$$R_e = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + \frac{R}{2}} = \frac{\frac{R^2}{4}}{\frac{2R}{2}} = \frac{R}{4}$$

$$R_e = \frac{13,5}{4} = 3,37 \Omega$$

$$P_2 = R_e \cdot I^2 = 3,37 \cdot 36 = 121,5 \Omega$$

20. Kada se pomoću dugačkog kabla priključi na gradsku mrežu sijalica snage 75 W (220 V) napon na njenim krajevima padne na 210 V. Koliki će biti napon na sijalicama kada se pomoću istog kabla paralelno priključi još jedna sijalica snage 100 W?

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Tuzla, 1998. godine)

Rješenje:

$$U=220 \text{ V}$$

$$P_1=75 \text{ W}(220 \text{ V})$$

$$P_2=100 \text{ W}(220 \text{ V})$$

$$\underline{U_1=210 \text{ V}}$$

$$U_2=?$$

jedna sijalica:

U_k -pad napona na kablu

R_k -otpornost kola

R_1 -otpornost prve sijalice

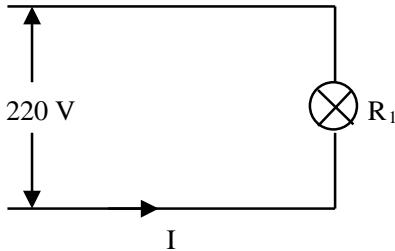
R_2 -otpornost druge sijalice

R -ekvivalentni otpor dvije sijalice, paralelno vezane

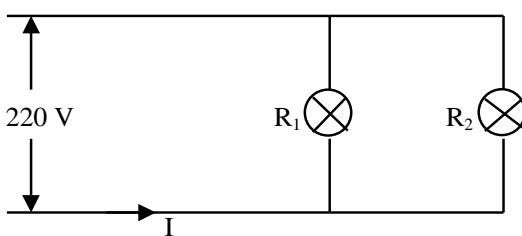
$$U = U_1 + U_k \Rightarrow U_k = 10 \text{ V}; \quad R_1 = \frac{U^2}{P_1} = 645,3 \Omega$$

$$U_1 = R_1 I \Rightarrow I = 0,325 \text{ A}$$

$$U_k = R_k I \Rightarrow R_k = 30,75 \Omega$$



dvije sijalice:

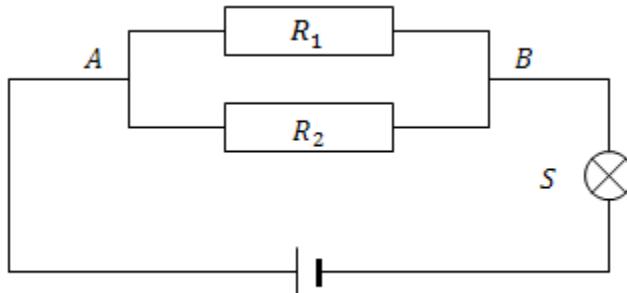


$$R_2 = \frac{U^2}{P_{21}} = 484 \Omega; \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 276,5 \Omega$$

$$I' = \frac{U}{R_k + R} = 0,716 \text{ A}$$

$$U_2 = R \cdot I' = 198 \text{ V}$$

21. U strujnom kolu na slici dati su sljedeći podaci: $U_{AB}=15 \text{ V}$, $R_1=120 \Omega$, $R_2=40 \Omega$. Otpor sijalice S iznosi 10Ω . Ako je unutrašnji otpor izvora 2Ω , izračunaj snagu sijalice i snagu svakog otpornika. Koliki je napon izvora u kolu? (Kantonalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Miričina 2007. godine)



Rješenje:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 30 \Omega$$

$$I = \frac{U_{AB}}{R_p} = 0,5 \text{ A}$$

Otpornici:

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = 0,375 \text{ A}; \quad I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = 0,125 \text{ A}$$

$$P_1 = U_{AB} \cdot I_1 = 5,625 \text{ W}; \quad P_2 = U_{AB} \cdot I_2 = 1,875 \text{ W}$$

Sijalica:

$$U_S = IR_S = 5 \text{ V}; \quad P_S = U_S \cdot I = 2,5 \text{ W}$$

Napon izvora struje:

$$I = \frac{E}{R_p + R_S + r_u} \Rightarrow E = I(R_p + R_S + r_u) = 21 \text{ V}$$

22. Dvožilni vod od bakra, dužine $l = 100 \text{ m}$ i poprečnog presjeka $S = 25 \text{ mm}^2$, vezuje generator sa prijemnikom koji radi pri naponu 220 V i struji jačine 120 A . Izračunati: a) snagu prijemnika, b) gubitak napona i snage duž voda i c) napon na krajevima generatora i snagu generatora. Specifični otpor bakra je $\rho = 0,0178 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$.

(Kontest za učenike osnovnih škola iz fizike TK, 2012. godine)

Rješenje:

$$\begin{aligned} l &= 100 \text{ m} \\ S &= 25 \text{ mm}^2 \\ \rho &= 0,0178 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \\ U_1 &= 220 \text{ V} \\ I &= 120 \text{ A} \\ a) P_1 &=? \\ b) \Delta U &=?; \Delta P=? \\ c) U &=?; P=? \\ a) P_1 &= U_1 \cdot I = 220 \text{ V} \cdot 120 \text{ A} \\ P_1 &= 26\,400 \text{ W} \\ P_1 &= 26,4 \text{ kW} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \Delta U &= I \cdot \rho \cdot \frac{2l}{S} \\ \Delta U &= 120 \text{ A} \cdot 0,0178 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{25 \text{ mm}^2} \\ \Delta U &\approx 17 \text{ V} \\ \Delta P &= \Delta U \cdot I = 17 \text{ V} \cdot 120 \text{ A} \\ \Delta P &= 2,04 \text{ kW} \\ c) U &= U_1 + \Delta U = 220 \text{ V} + 17 \text{ V} \\ U &= 237 \text{ V} \\ P &= P_1 + \Delta P = 26\,400 \text{ W} + 2\,040 \text{ W} \\ P &= 28\,440 \text{ W} \end{aligned}$$

23. Koliku masu ima bakrena žica, prečnika 2 mm koja ima otpor 1Ω ? ($\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\rho = 0,0172 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$) (Kontest za učenike osnovnih škola iz fizike Lukavac, 2014. godine)

Rješenje:

$$\begin{aligned} \rho &= 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \\ \rho &= 0,0172 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m} \\ r &= 10^{-3} \text{ m} \\ R &= 1 \Omega \\ m &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \rho \cdot V & l &= 182,56 \text{ m} \\ V &= S \cdot l = r^2 \pi l & V &= 573,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R &= \rho \cdot \frac{l}{s} & m &= 5,1 \text{ kg} \end{aligned}$$

24. Nit od volframa ima pri 0°C dužinu 5 cm i površinu presjeka $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2$. Kolika je jačina struje kroz nit kada se ona priključi na napon 120 V , ako je tada njezina temperatura 2900°C . Termički koeficijent otpora volframa je $4,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Rješenje:

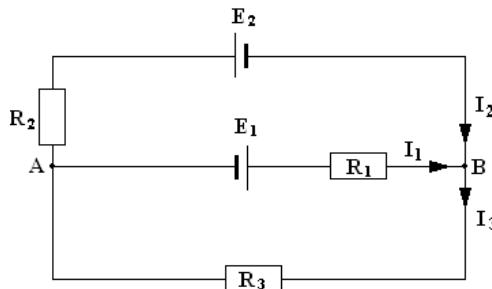
$$\begin{aligned} t_0 &= 0^\circ\text{C} \\ l &= 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} \\ S &= 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2 = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \\ U &= 120 \text{ V} \\ t &= 2900^\circ\text{C} \\ \alpha &= 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \\ I &=? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{R} = \frac{U}{R_0(1 + \alpha t)} \\ I &= \frac{U}{\rho \frac{l}{S}(1 + \alpha t)} = 3,64 \text{ A} \end{aligned}$$



Složena strujna kola

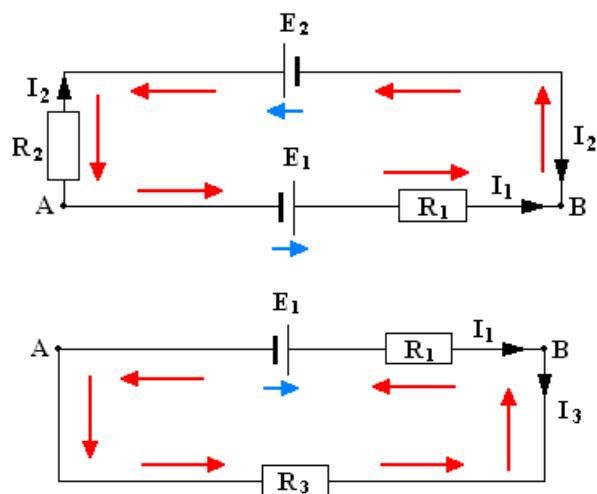
25. Izračunati jačine struja I_1 , I_2 i I_3 u kolu struje prikazanom na slici, ako su zadani sljedeći podaci: $E_1 = 10 \text{ V}$, $E_2 = 14 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ i $R_3 = 2 \Omega$. Unutrašnji otpori izvora struje se zanemaruju.



Rješenje:

Električno kolo na slici sadrži dva čvora (A i B) i tri grane. Grana između tačaka A i B sadrži izvor struje čija je *ems* E_1 i otpornik otpora R_1 . Druga grana sadrži izvor E_2 i otpornik R_2 i treća grana otpornik R_3 . Prilikom rješavanja složenog kola primjenom Kirhofovih pravila treba voditi računa o sljedećem:

1. Složeno kolo rastaviti na barem dvije konture. Označiti strelicama smjer *ems* i **to uvijek od negativnog ka pozitivnom polu izvora** (plave strelice). Proizvoljno izabrati smjer obilaska konture (nastojati da se smjer obilaska konture poklapa sa smjerom što većeg broja *ems*). U našem slučaju izabran je smjer suprotan smjeru kazaljke na satu (crvene strelice), koji se poklapa sa smjerovima obje *ems*. Obilazak konture počinje u proizvoljno izabranoj tački (konkretno u tački B) i završava u toj tački.
2. Proizvoljno izabrati smjerove struja kroz otpornike. Ako je izabrani smjer struje ispravan račun će dati pozitivan rezultat. U suprotnom, rezultat će biti negativan.
3. Kod formiranja jednačina *ems* uzimati sa pozitivnim predznakom ako se smjer obilaska konture poklapa sa smjerom *ems*. Padove napona na otpornicima također uzimati sa pozitivnim predznakom ako se smjer obilaska konture poklapa sa izabranim smjerom struje.



Postavljamo **Prvo Kirhofovo pravilo** za čvor B. Očigledno je da struje I_1 i I_2 ulaze u čvor, a struja I_3 izlazi iz čvora pa je:

$$I_3 = I_1 + I_2 \dots \dots \dots (1)$$

Počnimo obilazak prve konture iz tačke B. Smjerovi elektromotornih sila E_1 i E_2 , kao i struje I_1 se poklapaju sa izabranim smjerom obilaska, dok je smjer struje I_2 suprotan smjeru obilaska konture:

$$E_1 + E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2 \dots \dots \dots (2)$$

Učinimo isto i za drugu konturu:

$$-E_1 = -R_1 I_1 - R_3 I_3 \dots \dots \dots (3)$$

Ako treću jednačinu pomnožimo sa -1 dobijemo:

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \dots \dots \dots (3')$$

Kada u jednačine (2) i (3') uvrstimo vrijednosti elektromotornih sila i otpora, te kada u jednačini (3') umjesto I_3 pišemo $I_1 + I_2$, dobijamo sistem jednačina:



$$\begin{aligned} 24 \text{ V} &= 6 \Omega \cdot I_1 - 4 \Omega \cdot I_2 \\ 10 \text{ V} &= 6 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_2 \\ \hline &\text{ili} \\ 24 \text{ V} &= 6 \Omega \cdot I_1 - 4 \Omega \cdot I_2 \\ 10 \text{ V} &= 8 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_2 \end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijemo struje $I_1 = 2 \text{ A}$ i $I_2 = -3 \text{ A}$, a zatim iz jednačine (1) nalazimo i preostalu struju $I_3 = I_1 + I_2 = 2 \text{ A} + (-3 \text{ A}) = -1 \text{ A}$. Predznaci „-“ kod struja I_2 i I_3 govore da su njihovi smjerovi suprotni od pretpostavljenih.

26. a) Naći struju I_1 , I_2 , i I_3 u strujnom kolu prikazanom na slici 1.
 b) Šta zaključujemo iz predznaka dobivenih struja?
 c) Kolika je potencijalna razlika između čvorova A i B?

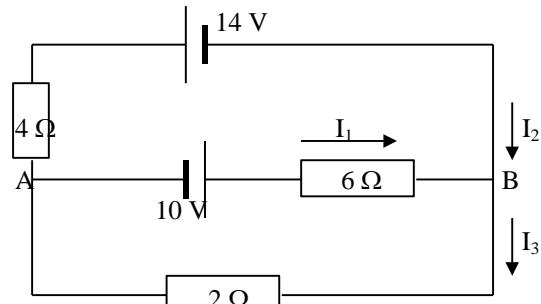
(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2000. godine)

Rješene:

$$E_1 = 14 \text{ V}; E_2 = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 6 \Omega; R_2 = 4 \Omega; R_3 = 2 \Omega$$

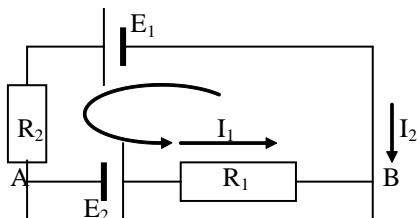
$$I_1 = ?, I_2 = ?, I_3 = ?$$



slika.1.

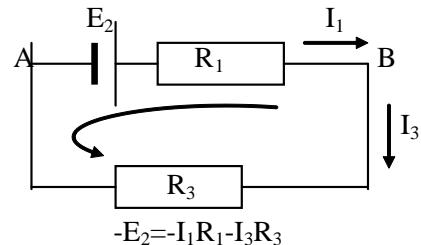
a) Prvi Kirchoffov zakon: $I = I_1 + I_2 + I_3$

Drugi Kirchoffov zakon:

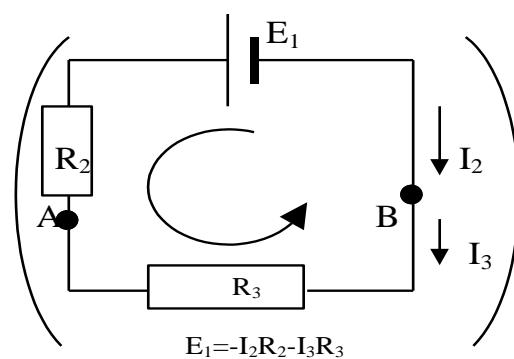


$$E_1 + E_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2$$

ili



$$-E_2 = -I_1 R_1 - I_3 R_3$$



$$E_1 = -I_2 R_2 - I_3 R_3$$

Sada se mogu odabrati tri jednačine sa tri nepoznate,

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$14 \text{ V} + 10 \text{ V} = 6 \Omega \cdot I_1 + 4 \Omega \cdot I_2$$

$$\underline{-10 \text{ V}} = \underline{-6 \Omega \cdot I_1 - 2 \Omega \cdot I_2}$$

$$24 \text{ V} = 6 \Omega \cdot I_1 + 4 \Omega \cdot I_2 \quad / :2$$

$$\underline{10 \text{ V}} = \underline{6 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_2}$$

$$12 \text{ V} = 3 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_2$$

$$\underline{10 \text{ V}} = \underline{6 \Omega \cdot I_1 + 2 \Omega \cdot I_2}$$

$$I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = -3 \text{ A}, I_3 = -1 \text{ A}$$

b) Činjenica da struje I_2 i I_3 imaju negativan predznak, upućuje na zaključak da je izabrani smjer za te struje pogrešan. Brojna vrijednost je tačna.

c) $U_{AB} = I_3 R_3 = 1 \text{ A} \cdot 2 \Omega = 2 \text{ V}$

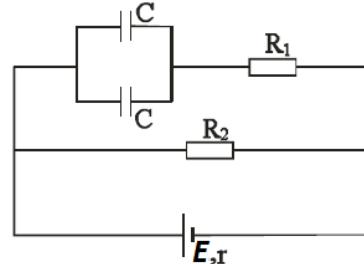
Zadaci za samostalan rad

- Električni štednjak uključen na napon $U=380 \text{ V}$ izvrši rad $A=750 \text{ kWh}$. Koliko je vremena potrebno da se izvrši navedeni rad ako je grijac od cekasa dug 20 m i poprečnog presjeka $1,5 \text{ mm}^2$?
- Tri električna potrošača snage 500 W , 800 W , 460 W priključena su na napon 220 V .
 - Kolika je ukupna jačina struje u dovodnom provodniku?
 - Koliki rad izvrše svi potrošači za pet sati?
- Električni grijac ukopčan na napon $U=220 \text{ V}$ treba da zagrije 704 g vode od 10°C na 100°C . Jačina struje iznosi 2 A .
 - Koliko je vremena potrebno zagrijavati vodu?
 - Koliko će se električne energije potrošiti?
- Električni lonac treba da zagrije 1496 g vode od 10°C do temperature ključanja. Koliko je vremena potrebno za to zagrijavanja ko je lonac priključen na napon od 220 V , a kroz njega prolazi struja jačine 6 A ?
- Koliko otpornika od 5Ω trebamo spojiti u seriju da se uz napon od 90 V dobije struja od 3 A ?
- Koliki je ukupan otpor pletenice koja se sastoji od tri čelične žice i 20 aluminijskih žica dugih 100 m i s poprečnim presjekom $0,5 \text{ mm}^2$? ($\rho_{\text{č}} = 0,15 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$; $\rho_{\text{Al}} = 0,032 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$)
- Potrošač snage $P=500 \text{ W}$ predviđen za napon $U=100 \text{ V}$. Koliki mu je otpor i na koji ga način moramo spojiti s potrošačem da bismo ga mogli priključiti na napon gradskih mreža?
- Koliko je duga pletenica od 20 bakrenih žica s poprečnim presjekom 2 mm^2 ako svaka ima otpor $R_n=5 \Omega$? Koliki je ukupni otpor pletenice?
- Tri otpornika otpora 5Ω , 7Ω i 8Ω spojena su serijski. Odredite jačinu struje u krugu i otklone voltmetra kada ga priključimo na krajeve svakog otpornika. Napon je 100 V .
- Kroz žicu dugu 2 km koja ima otpor 20Ω prolazi struja jačine 100 mA . Koliki je pad naponu na svakih 200 m dužine žice?
- U strujnom krugu priključenom na napon 110 V prolazi struja jačine 4 A . U krugu se nalaze serijski spojen otpornik otpora 8Ω i jedna sijalica. Koliki je otpor sijalice?
- Na valjkasti predmet s poluprečnikom 10 cm namotamo sloj od 50 namotaja bakrene žice kojoj je prečnik 2 mm . Koliko je dugažica i koliki otpor pruža prolazjenju struje?



13. Svako jutro kuha se ista količina čaja s vodom iz vodovoda, iste temperature i u istoj posudi. Posuda se zagrijava sa dva grijача otpora od $100\ \Omega$ i $150\ \Omega$. Kada su grijачи spojeni redno voda proključa za 10 minuta. Za koje vrijeme će proključati voda u posudi kada grijаче spojimo paralelno? (Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, Travnik, 1996. godine)

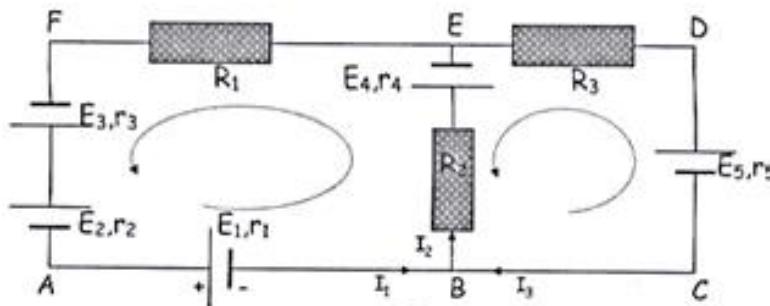
14. Na slici je dato električno kolo, pri čemu je $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $E = 10\ V$, $r = 1\ \Omega$, $iC = 20\ \mu F$. Odredi kolika struja protiče kroz granu kola u kojoj se nalazi izvor, kao i količine nanelektrisanja na kondenzatorima.



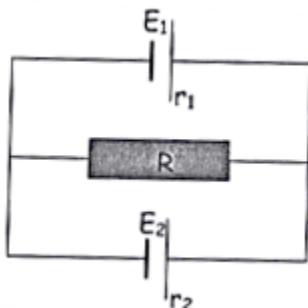
15. Kroz metalni provodnik protiče struja jačine $I=2\ A$ tokom 10 minuta. Izračunati broj slobodnih elektrona koji prođu kroz poprečni presjek provodnika za ovo vrijeme.

16. Na akumulator je priključena redna veza dva provodnika pri čemu je otpor jednog provodnika $n = 2$ puta veći od otpora drugog. Koliko puta će se promijeniti jačina struje koja teče kroz akumulator ako se na njega priključi paralelna veza istih provodnika? Poznato je da je struja kratkog spoja $k = 5$ puta veća od struje koja teče kroz akumulator ako je na njega priključen samo provodnik manjeg otpora.

17. Odredi jačine struja u svim dijelovima kola, prikazanom na slici, ako su zadani sljedeći podaci: $E_1 = E_2 = E_5 = 2\ V$, $E_3 = 4\ V$, $E_4 = 1\ V$, $r_1 = r_2 = r_5 = 0,3\ \Omega$, $r_3 = 0,4\ \Omega$, $r_4 = 0,2\ \Omega$, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 2,8\ \Omega$, $R_3 = 2,2\ \Omega$



18. Kolika je jačina struje kroz otpornik R i izvore E_1 i E_2 ?



$$\begin{aligned} E_1 &= 4\ V \\ E_2 &= 2\ V \\ R &= 10\ \Omega \\ r_1 &= 0,2\ \Omega \\ r_2 &= 0,1\ \Omega \end{aligned}$$



Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. t=76h; 2. a) I=8A; b) A = 8,8 kWh; 3.a) t=10 min, b) E=73,33Wh; 4.

t=425s; 5. n=6; 6. Pletenica je spojotporna u paralelu: $\frac{1}{R} = \frac{3}{R_c} + \frac{20}{R_{Al}}$; $R_c = \rho_c \frac{l}{S} = 30 \Omega$; $R_{Al} = \rho_{Al} \frac{l}{S} = 6,4 \Omega$; $R = 0,32 \Omega$; 7. Budući da je potrošač predviđen za napon $U_1=100$ V, dozvoljena struja iznosi: $I = \frac{P}{U_1} = 5 A$. Otpor potrošača iznosi $R_t = \frac{U_1}{I} = 20 \Omega$. Uz dozvoljenu jačinu struje pri naponu od 220 V ukupan otpor $R = \frac{U_2}{I} = 44 \Omega$. $R > R_t$, dakle, spoj mora biti serijski $R_s = 24 \Omega$; 8. $l=588,2m$; $R_n=5\Omega \frac{1}{R} = \frac{n}{R_n}$; $R=0,25\Omega$; 9. $I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1+R_2+R_3} = 5A$; $U_1 = IR_1 = 25$ V; $U_2 = IR_2 = 35$ V; $U_3 = IR_3 = 45$ V; 10. $U = IR_{200}$; $R: l = R_{200}: \frac{l}{10}$; $R_{200} = \frac{R \frac{l}{10}}{l} = \frac{R}{10} = 2 \Omega$; $U_{200} = 0,1 \cdot 2 = 0,2$ V; 11. $R = \frac{U}{I} = 27,5 \Omega$; $R_2 = R - R_1 = 27,5 \Omega - 8 \Omega = 19,5 \Omega$; 12. $l = n2r\pi = 31,4$ m; $R = \rho \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{r_1^2\pi} = 0,17 \Omega$

13.

$$R_s = R_1 + R_2 \\ R_s = 100\Omega + 150\Omega$$

$$R_s = 250\Omega$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_p = \frac{100\Omega \cdot 150\Omega}{100\Omega + 150\Omega}$$

$$R_p = 60\Omega$$

$$Q_1 = I_1^2 R_s t_s$$

$$Q_2 = I_2^2 R_p t_p$$

$$Q_1 = Q_2$$

$$I_1 = \frac{U}{R_s}; I_2 = \frac{U}{R_p}$$

$$I_1^2 R_s t_s = I_2^2 R_p t_p$$

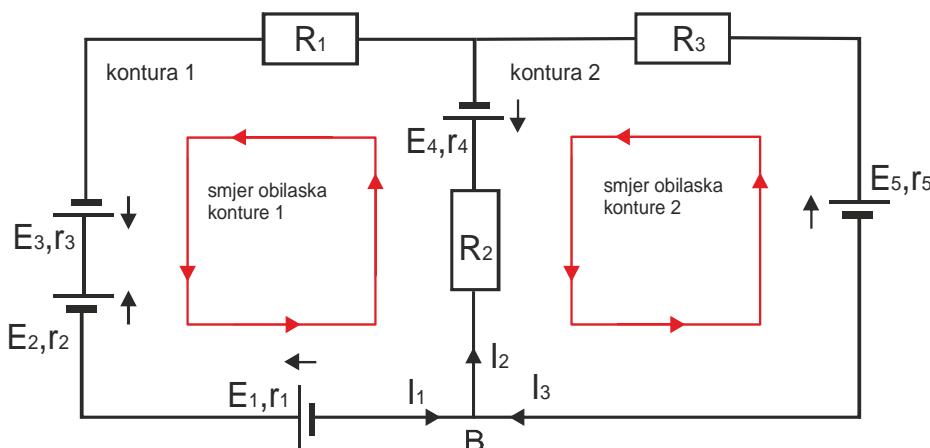
$$t_p = \frac{I_1^2 R_s t_s}{I_2^2 R_p}$$

$$t_p = 144 s$$

14. U stacionarnom režimu struja ne prolazi kroz kondenzator, pa otpornik R_1 nema uticaja na jačinu struje, te se izostavlja u jednačini za jačinu struje: $I = \frac{E}{r+R_2}$. Napon između A i B je $U_{AB} = I \cdot R_2 = 7,5$ V. Ukupna količina nanelektrisanja je $q = C_e \cdot U_{AB} = 300 \mu C$, a na svakom kondenzatoru $q_1 = 150 \mu C$; 15. $n=7,5 \cdot 10^{21}$; 16. U slučaju redne veze kroz akumulator protiče struja jačine $I_1 = \frac{E}{(n+1)R+r}$, a u slučaju paralelne veze provodnika

$I_2 = \frac{E}{(n+1)r}$ Odnos jačina struja iznosi $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{n}{n+1}R+r}{(n+1)R+r} = \frac{\frac{n}{n+1}\frac{R}{r}+1}{\frac{(n+1)R}{r}+1}$. Iz uslova za struju kratkog spoja dobijamo $\frac{I_{max}}{I'} = \frac{\frac{R}{r}}{\frac{E}{R+r}} = \frac{R}{r} + 1 = 5 \Rightarrow \frac{R}{r} = 4$. Zamjenjujući ovaj odnos u gornji izraz dobijamo odnos $\frac{I_1}{I_2} = \frac{11}{39}$.

17.





Prvo Kirhofovo pravilo za čvor B:

$$I_2 = I_1 + I_3 \dots \quad (1)$$

Kontura 1:

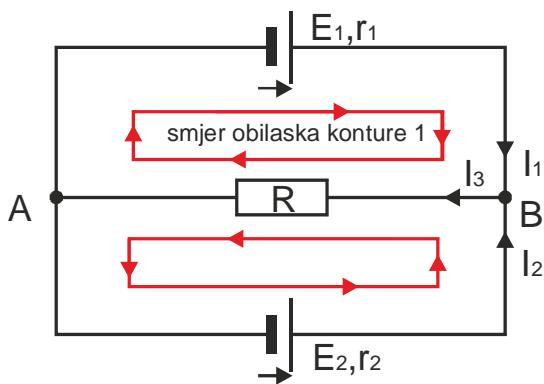
$$E_3 - E_2 - E_1 - E_4 = I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot r_3 + I_1 \cdot r_2 + I_1 \cdot r_1 + I_2 \cdot R_2 + I_2 \cdot r_4 \dots \quad (2)$$

Kontura 2:

$$E_5 + E_4 = -I_3 \cdot R_3 - I_3 \cdot r_5 - I_2 \cdot R_2 - I_2 \cdot r_4 \dots \quad (3)$$

Rješavanjem jednačina dobijamo: $I_1 = 0,1 \text{ A}$; $I_2 = -0,5 \text{ A}$ i $I_3 = -0,6 \text{ A}$

18.



$$I_3 = I_1 + I_2 \dots \quad (1)$$

$$E_1 = I_1 r_1 + I_3 R \dots \quad (2)$$

$$E_2 = I_2 r_2 + I_3 R \dots \quad (3)$$

$$I_1 = 6,75 \text{ A}$$

$$I_2 = -6,485 \text{ A}$$

$$I_3 = 0,265 \text{ A}$$



8. Magnetno polje

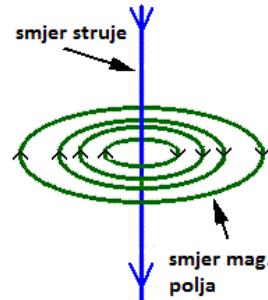
Pregled najvažnijih formula

Jačina magnetnog polja pravolinijskog provodnika

$$H = \frac{I}{2r\pi},$$

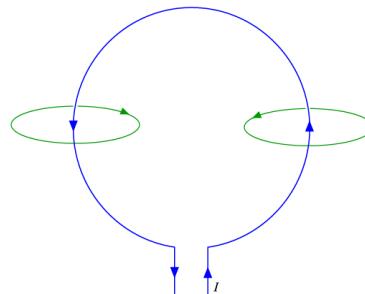
gdje je I jačina električne struje, $2r\pi$ obim kruga.

Jedinica za jačinu magnetnog polja u SI je $\frac{A}{m}$.



Jačina magnetnog polja kružnog provodnika

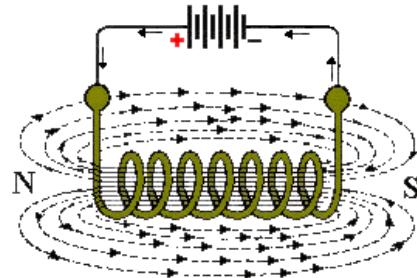
$$H = \frac{I}{2r}.$$



Jačina magnetnog polja zavojnice (solenoida)

$$H = \frac{N \cdot I}{l},$$

gdje je N broj namotaja zavojnice, a l dužina zavojnice.



Magnetna indukcija

$$B = \mu \cdot H$$

Jedinica za magnetnu indukciju u SI je tesla (T).

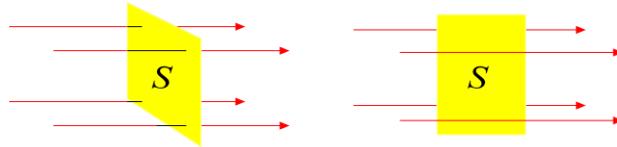
$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r.$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$ – magnetna permeabilnost vakuma, μ_r – relativna permeabilnost.

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

Fluks magnetne indukcije kroz površinu postavljenu okomito na linije magnetnog polja

$$\Phi = B \cdot S$$



$$\Phi = BS \quad \Phi = 0$$

Jedinica za magnetni fluks u SI je veber (Wb):

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot \text{m}^2$$

Sila kojom magnetno polje djeluje na provodnik kojim teče električna struja, postavljen okomito na linije magnetnog polja (Amperova sila)

$$F = B \cdot I \cdot l$$

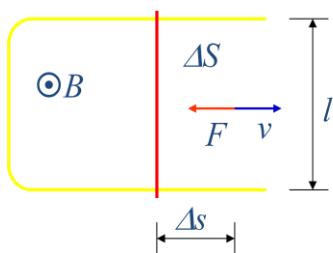


Sila kojom uzajamno djeluju dva ravna paralelna provodnika kojim teče električna struja

$$F = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2r\pi},$$

gdje je l dužina provodnika, r rastojanje između provodnika.

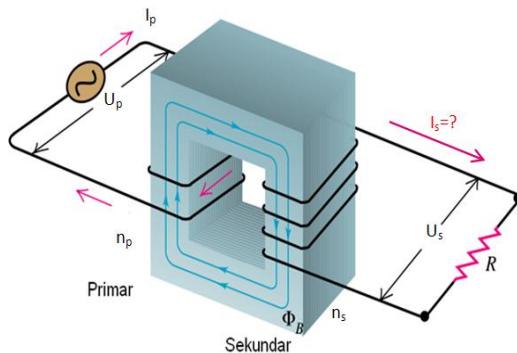
Faradejev zakon elektromagnetne indukcije



$$\begin{aligned} E_i &= Blv = Bl \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{B\Delta s}{\Delta t} \\ E_i &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \\ E_i &= -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \end{aligned}$$

Transformator

$$\begin{aligned} n_p : n_s &= U_p : U_s \\ n_p : n_s &= I_s : I_p \\ U_p : U_s &= I_s : I_p \\ U_p I_p &= U_s I_s \\ P_p &= P_s \end{aligned}$$



Zadaci za vježbu

1. Na kojem rastojanju od pravolinijskog provodnika, kojim teče električna struja jačine $12,56 \text{ A}$, jačina magnetnog polja iznosi $2 \cdot 10^2 \text{ A/m}$?

Rješenje:

$$I = 12,56 \text{ A}$$

$$H = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\underline{r = ?}$$

$$H = \frac{I}{2r\pi} \Rightarrow r = \frac{I}{2H\pi}$$

$$r = \frac{12,56 \text{ A}}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 3,14}$$

$$r = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

2. U homogeno magnetno polje jačine $2 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ postavi se kružni okvir prečnika 20 cm.
- Kolika je magnetna indukcija polja?
 - Kako treba postaviti okvir da magnetni fluks kroz njega bude maksimalan?
 - Odrediti magnetni fluks polja za taj položaj okvira.

Okvir se nalazi u vazduhu.

Rješenje:

$$d = 20 \text{ cm} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

$$\mu_r = 1$$

$$H = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

$$\underline{a) B = ?; b) \Phi = ?}$$

$$a) B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = 25,12 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 25,12 \text{ mT}$$

b) Magnetni fluks kroz okvir je maksimalan kad je njegova površina okomita na linije magnetnog polja (na pravac vektora magnetne indukcije)

$$c) \Phi = B \cdot S = B \cdot \frac{d^2\pi}{4} = 7887,68 \cdot 10^{-7} \text{ Wb} = 788,8 \mu\text{Wb}$$

3. Elektromagnet dužine 40 cm i površine poprečnog presjeka 10 cm^2 ima 800 namotaja kroz koje teče struja jačine 2 A. Relativna permeabilnost željezne jezgre je 600. Odredi:
- Magnetnu indukciju u središtu elektromagneta.
 - Magnetni fluks kroz elektromagnet.

Rješenje:

$$l = 40 \text{ cm} = 40 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$S = 10 \text{ cm}^2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$N = 800$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$$

$$\underline{\mu_r = 600}$$

$$\underline{a) B = ?; b) \Phi = ?}$$

$$a) B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{l}$$

$$B = 3,0144 \text{ T}$$

$$b) \Phi = B \cdot S = 30,144 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi = 3,0144 \text{ mWb}$$

4. Dva dugačka ravna provodnika međusobno su udaljena 12 cm. Kroz prvi provodnik teče struja jačine 10 A, a kroz drugi 5 A. Struje su istoga smjera.



- Kolika je magnetna indukcija na polovini razmaka među provodnicima?
- Gdje između provodnika magnetno polje iščeza?

Rješenje:

$$r = 12 \text{ cm} = 0,12 \text{ m}$$

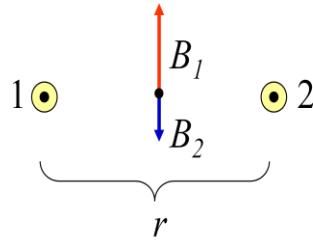
$$I_1 = 10 \text{ A}$$

$$I_2 = 5 \text{ A}$$

$$\text{a) } B = B_1 - B_2 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi \frac{r}{2}} - \mu_0 \frac{I_2}{2\pi \frac{r}{2}}$$

$$B = \frac{\mu_0}{\pi r} (I_1 - I_2) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}}{\pi \cdot 0,12 \text{ m}} \cdot (10\text{A} - 5\text{A})$$

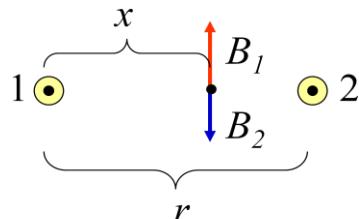
$$B = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$



$$\text{b) } B_1 = B_2$$

$$\mu_0 \frac{I_1}{2\pi x} = \mu_0 \frac{I_2}{2\pi(r-x)}$$

$$x = \frac{I_1 r}{I_1 + I_2} = \frac{10\text{A} \cdot 12 \text{ cm}}{10\text{A} + 5\text{A}}$$

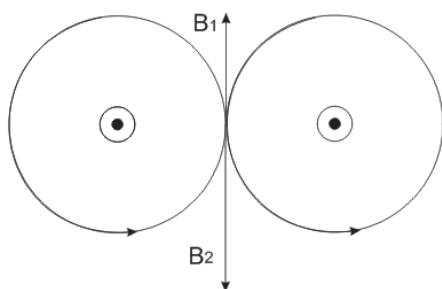


$$x = 8 \text{ cm}$$

- Dva paralelna pravolinijska provodnika međusobno su udaljena 50 cm. Kroz jedan provodnik teće struja jačine $I_1 = 10 \text{ A}$, a kroz drugi jačine $I_2 = 15 \text{ A}$. Odredi magnetnu indukciju polja u tački koja se nalazi na polovini njihovog razmaka ako struje teku:
 - U istom smjeru.
 - U suprotnim smjerovima.

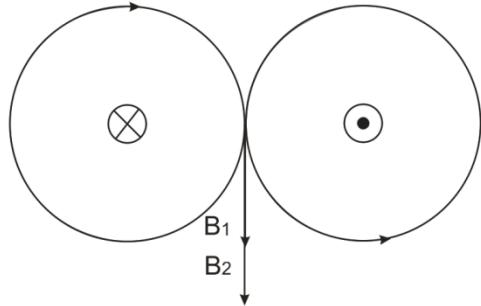
Rješenje:

- Kad struje teku u istom smjeru



$$\begin{aligned} B &= B_2 - B_1 = \mu_0 \cdot H_2 - \mu_0 \cdot H_1 \\ B &= \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r} - \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r} \\ B &= \frac{\mu_0}{r\pi} (I_2 - I_1) = 40 \cdot 10^{-7} \text{ T} = 4 \mu\text{T} \end{aligned}$$

Kad struje teku u suprotnim smjerovima



$$B = B_2 + B_1$$

$$B = \frac{\mu_0}{r\pi} (I_2 + I_1) = 200 \cdot 10^{-7} \text{ T} = 20 \text{ } \mu\text{T}$$

6. Bakarni prsten prečnika 20 cm i debljine 2 mm postavljen je normalno na linije homogenog magnetnog polja. Kolika mora biti promjena magnetne indukcije da bi jačina struje kroz prsten bila konstantno 10 A?

Rješenje:

$$2r = 20 \text{ cm} \Rightarrow r = 10 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$d = 2 \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\rho_{\text{Cu}} = 0,017 \text{ } \Omega \text{mm}^2/\text{m}$$

$$I = 10 \text{ A}$$

$$\Delta B/\Delta t = ?$$

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B \cdot S}{\Delta t} = \frac{\Delta B \cdot r^2 \pi}{\Delta t}$$

$$E = U = I \cdot R = I \cdot \rho \frac{l}{S_1} = I \cdot \rho \cdot \frac{2r\pi}{\frac{d^2\pi}{4}}$$

$$I \cdot \rho \cdot \frac{2r\pi}{\frac{d^2\pi}{4}} = \frac{\Delta B \cdot r^2 \pi}{\Delta t}$$

$$I \cdot \rho \cdot \frac{8r\pi}{\frac{d^2\pi}{4}} = \frac{\Delta B \cdot r^2 \pi}{\Delta t}$$

$$I \cdot \rho \cdot \frac{8r}{d^2} = \frac{\Delta B \cdot r^2 \pi}{\Delta t} / : r$$

$$\frac{8I \cdot \rho}{d^2} = \frac{\Delta B \cdot r\pi}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{8I\rho}{d^2 r\pi}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{8 \cdot 10 \text{ A} \cdot 0,017 \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}}{4 \text{ mm}^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot 3,14} = 0,0108 \cdot 10^2 \frac{\text{T}}{\text{s}} = 1,1 \frac{\text{T}}{\text{s}}$$

7. U homogenom magnetnom polju indukcije $B = 2 \text{ T}$ ravnomjerno rotira metalna žica dužine $l = 20 \text{ cm}$ oko normalne ose koja prolazi kroz jedan njen kraj. Osa rotacije se poklapa sa pravcem polja, a žica čini 4 ob/s. Kolika će biti elektromotorna sila indukovana u žici?

Rješenje:

Žica za jednu sekundu napravi 4 obrtaja, tj. prebriše površinu od $4r^2\pi$.

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot S}{t} = \frac{B \cdot 4r^2\pi}{t}$$

$$E = 1,0048 \text{ V} \approx 1 \text{ V}$$

8. Kružni kalem, površine poprečnog presjeka $S = 100 \text{ cm}^2$, sa $N = 1000$ navojaka, postavljen je u homogeno magnetno polje jačine $H = 10^5 \text{ A/m}$ i to tako da se osa kalema poklapa sa linijama magnetnog polja. Kolika količina nanelektrisanja protekne kroz kratko vezane navojke kalema kada se u njega uvuče šipka, načinjena od gvožđarelativne magnetne permeabilnosti $\mu_r = 500$? Otpornost jednog navojka kalema iznosi $R_1 = 2 \Omega$, dok je magnetna permeabilnost vakuma $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$.

Rješenje:

$$S = 100 \text{ cm}^2 = 100 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$N = 1000$$

$$H = 10^5 \text{ A/m}$$

$$\mu_r = 500$$

$$R_1 = 2 \Omega$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

$$q = ?$$

$$E = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = N \frac{B \cdot S}{t}$$

$$E = U = I \cdot R; B = \mu_0 \mu_r H$$

$$I \cdot R = N \mu_0 \mu_r H \cdot \frac{S}{t}$$

$$I = \frac{q}{t}; R = N R_1$$

$$\frac{q}{t} \cdot N R_1 = N \mu_0 \mu_r H \cdot \frac{S}{t}$$

Cijela jednačina se može pomnožiti sa t i podijeliti sa N , pa se dobije

$$q \cdot R_1 = \mu_0 \mu_r H \cdot S$$

$$q = \frac{\mu_0 \mu_r H \cdot S}{R_1} = 314000 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 0,31 \text{ C}$$

9. U homogenom magnetnom polju indukcije 1,5 T jednolikо se kreće pravolinijski provodnik brzinom 1m/s. Dužina provodnika je 10 cm, a njime teče struja jačine 2 A. Provodnik se kreće okomito na polje. Kolika je snaga potrebna za ovo kretanje?



Rješenje:

$$B = 1,5 \text{ T}$$

$$F = B \cdot I \cdot l = 0,3 \text{ N}$$

$$l = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$P = F \cdot v = 0,3 \text{ W}$$

$$I = 2 \text{ A}$$

$$F = ?; P = ?$$

10. Metalni prsten otpora $0,1 \Omega$ i radijusa 10 cm nalazi se u magnetnom polju, okomitom na ravan prstena, koje raste brzinom $10 \mu\text{T/s}$. Kolika struja teče prstenom?

Rješenje:

$$R = 0,1 \Omega$$

$$r = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$$

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = 10 \mu\text{T}$$

$$I = ?$$

Kako je $N = 1$, to je

$$E = N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

$$E = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = r^2 \pi \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

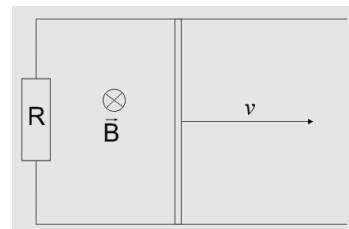
$$E = U = I \cdot R$$

$$I \cdot R = r^2 \pi \frac{\Delta B}{\Delta t} \Rightarrow I = \frac{r^2 \pi}{R} \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = 3,14 \mu\text{A}$$

11. Pravolinijski provodnik dužine $l = 0,6 \text{ m}$ i otpora $R_1 = 0,1 \Omega$

kreće se brzinom 3 m/s u homogenom magnetnom polju indukcije $1,5 \text{ T}$ okomito na linije polja.

- a) Kolika je indukovana ems na krajevima provodnika?
- b) Ako spojimo provodnik u kolo preko otpora $R = 5 \Omega$ kolika će biti jačina struje u kolu?
- c) Kolika je sila potrebna za izvođenje kretanja?
- d) Koliki rad izvrši vanjsko kolo za 10 s ?



Rješenje:

$$E_i = Blv = 2,7 \text{ V}$$

$$I = \frac{E_i}{R + R_1} = 0,53 \text{ A}$$

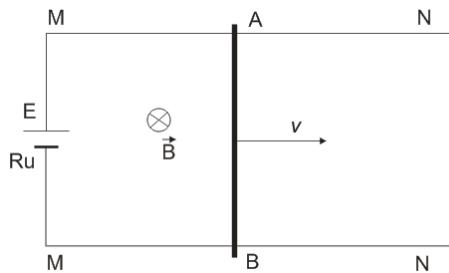
$$F = B \cdot l \cdot I = 0,477 \text{ N}$$

$$A = P \cdot t = F \cdot v \cdot t = 14,31 \text{ J}$$

12. Provodnik dužine $AB = l = 0,6 \text{ m}$ i otpora $R = 0,02 \Omega$ pod djelovanjem sile homogenog magnetnog polja $B = 1,6 \text{ T}$ kreće se brzinom $v = 0,5 \text{ m/s}$ bakarnim šinama MN kao na slici. Šine su priključene na izvor struje $E = 0,96 \text{ V}$ i $R_u = 0,01 \Omega$. Polje je okomito na ravan crteža. Odrediti:

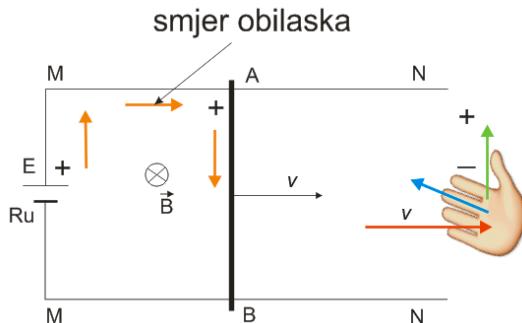
- a) Elektromotornu силу kola.
- b) Jačinu struje u kolu.
- c) Snagu provodnika u kretanju.

(Republičko takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike, 1991. godine)



Slika uz zadatak 12

Rješenje:



Dlan desne ruke postavimo tako da se provodnik kreće prema dlanu, a ispružene prste u smjeru vektora magnetne indukcije (plava strelica). Tada otklonjeni palac pokazuje smjer ems (zelena strelica).

$$a) E_{uk} = E - Blv = 0,48 \text{ V}$$

$$b) I = \frac{E_{uk}}{R + R_u} = 16 \text{ A}$$

$$c) P = F \cdot v = B \cdot I \cdot l \cdot v = 7,68 \text{ W}$$

13. Na transformatoru stoji oznaka 220 V/10 V. Ako je opterećenje transformatora takvo da mu snaga iznosi 1 kW i ako se gubici transformatora zanemaruju, odrediti:
 a) Jačinu struje u sekundarnom kolu; b) Jačinu struje u primarnom kolu; c) Broj namotaja primara, ako sekundar ima 200 namotaja

Rješenje:

$$U_p = 220 \text{ V}$$

$$U_s = 10 \text{ V}$$

$$n_s = 200$$

$$P = 1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$$

$$a) I_s = ?$$

$$b) I_p = ?; c) n_p = ?$$

$$a) P = U_s I_s \Rightarrow I_s = \frac{P}{U_s} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ A}$$

$$b) I_p = \frac{P}{U_p} = \frac{1000}{220} = 4,55 \text{ A}$$

Ili

$$U_p I_p = U_s I_s \Rightarrow I_p = \frac{U_s I_s}{U_p} = \frac{10 \cdot 100}{220} = 4,55 \text{ A}$$

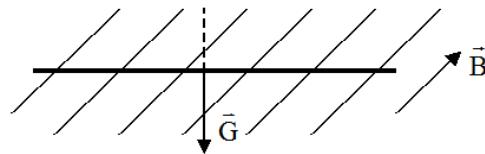
$$c) n_p : n_s = U_p : U_s \Rightarrow n_p = \frac{n_s U_p}{U_s} = \frac{200 \cdot 220}{10} = 4400$$

Zadaci za samostalan rad

- Magnetna permeabilnost mehkog željeza iznosi $1,5 \cdot 10^{-4}$ Tm/A, livenog čelika $3,14 \cdot 10^{-6}$ Tm/A i vazduha $1,2567 \cdot 10^{-6}$ Tm/A. Kolika je relativna permeabilnost tih tvari (supstanci)?
- U nekoj tački jačina magnetnog polja pravolinijskog provodnika iznosi 13,6 A/m. Na kojem rastojanju od pravolinijskog provodnika kojim teče struja $I = 6 \text{ A}$ se nalazi ta tačka?



3. Jačina magnetnog polja u centru kružnog provodnika kroz koji prolazi struja jačine 11 A iznosi 120 A/m. Odredi prečnik kruga.
4. Magnetna indukcija u nekoj tački polja iznosi $B=0,6 \text{ mT}$, a jačina magnetnog polja $H=9,55 \text{ A/m}$. Kolika je permeabilnost sredine u toj tački? Kolika je relativna permeabilnost?
5. Na kojem rastojanju od ose dugačkog pravolinjskog provodnika, kroz koji prolazi struja jačine 0,5 A, magnetna indukcija iznosi $2 \mu\text{T}$?
6. Između polova elektromagneta vlada homogeno magnetno polje. U tom se polju, obješen na tankim nitima okomito na smjer polja, nalazi provodnik dužine 5 cm kojim prolazi struja jačine 20 A. Polje djeluje na provodnik silom od $12,56 \cdot 10^{-2} \text{ N}$. Kolika je magnetna indukcija polja?
7. Željezni prsten poprečnog presjeka 5 cm^2 ima srednji promjer (prečnik) 16 cm. Oko prstena je namotano 400 zavoja. Relativna permeabilnost željeza je 500. Kad žicom teče struja, u prstenu je magnetni fluks $5 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$. Kolike su magnetna indukcija i jačina struje koja teče zavojnicom?
8. Zatvoreni provodnik otpora 3Ω nalazi se u magnetnom polju. Promjenom jačine magnetnog polja povećavao se magnetni tok (fluks) kroz provodnik od $0,0002 \text{ Wb}$ na $0,0005 \text{ Wb}$. Koliki je naboj prošao poprečnim presjekom provodnika?
9. Zavojnica prečnika 5 cm smještena je u homogeno magnetno polje koje je paralelno s osom zavojnice. Magnetna indukcija se jednoliko mijenja brzinom $\Delta B / \Delta t = 10^{-2} \text{ T/s}$. Zavojnica ima 1000 zavoja namotanih samo u jednom sloju. Krajevi zavojnice spojeni su s kondenzatorom kapaciteta $10 \mu\text{F}$. Odrediti količinu nanelektrisanja na kondenzatoru.
10. Kružni provodnik prečnika 40 cm, načinjen od bakarne žice debljine 2 mm, nalazi se u magnetnom polju, koje se mijenja ravnomjerno brzinom $0,02 \text{ T/s}$. Koliki se napon indukuje na krajevima provodnika i kolika jačina struje teče kroz provodnik?
($\rho=0,017 \Omega \text{mm}^2/\text{m}$) (*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Travnik, 1996. godine*)
11. Ravan vodič dužine 1 m, mase $7,84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$, smješten je u zraku okomito na horizontalno magnetno polje jačine $6,34 \cdot 10^3 \text{ A/m}$. Naći jačinu struje koja se mora propustiti kroz vodič da on u magnetnom polju miruje. Odredi na crtežu smjer pod tim uslovima.
Magnetni permeabilitet vakuumu $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$).
(*Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Sarajevo, 2000. godine*)
12. Transformator pretvara struju napona 220 V u struju napona 20 V. Na njegovom sekundaru je priključen potrošač snage 4 kW. Odredi: a) jačinu struje u sekundaru, b) jačinu struje u primaru.
13. Na sekundar transformatora 200/50 V priključen je potrošač snage $P=600 \text{ W}$. Izračunati struju I_p u primaru i I_s u sekundaru transformatora.
14. Primarnim kalemom transformatora teče struja 2000 A. Broj namotaja u sekundarnom kalemu je 300 puta veći nego u primarnom. Napon sekundarnog kalemata je 10000 V.





Odredi: a) jačinu struje u sekundarnom kalemu, b) snagu u sekundarnom kalemu, c) napon primarnog kalema.

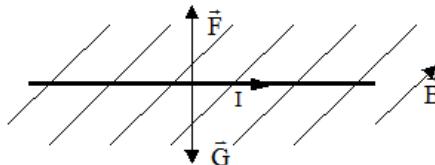
15. Transformator u primaru ima 30 puta više namota nego u sekundaru. Krajevi primara spojeni su na izvor napona izmjenične struje od 3 kV, a krajevi sekundara sa grijачem koji za 10 minuta zagrije 15 l vode od 15 °C do temperature ključanja.

a) Kolika je jačina struje u primaru?

b) Koliki je otpor grijачa ($c=4186,6 \text{ J/kgK}$)?

(Federalno takmičenje učenika osnovnih škola iz fizike Travnik, 1996. godine)

Rješenja zadataka za samostalan rad: 1. $\mu_{r1} = 119$, $\mu_{r2} = 4$, $\mu_{r3} = 250$; 2. $r = 7 \text{ cm}$; 3. $d = 9,2 \text{ cm}$; 4. $\mu = 6,28 \cdot 10^{-5} \text{ Tm/A}$; $\mu_r = 50$; 5. $r = 5 \text{ cm}$; 6. $B = 0,126 \text{ T}$; 7. $B = 1 \text{ T}$; $I = \frac{lB}{\mu_0 \mu_r \cdot N}$; $l = 2r\pi$; $I = 2A$; 8. $\Delta q = I\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}$; $\Delta q = 10^{-4} \text{ C}$; 9. $q = CU_i = C \cdot N \cdot \frac{S\Delta B}{\Delta t}$; $S = \frac{d^2\pi}{4}$; $q = 2 \cdot 10^{-7} \text{ C}$; 10. $U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = S \frac{\Delta B}{\Delta t} = r^2\pi \frac{\Delta B}{\Delta t}$; $U = 2,512 \text{ mV}$; $I = \frac{U}{R}$; $R = \rho \cdot \frac{1}{S_1}$; $l = 2r\pi$; $S_1 = \frac{d^2\pi}{4}$; $I = 0,369 \text{ A}$; 11. Uslov ravnoteže: $\vec{F} + \vec{G} = 0 \Rightarrow \vec{F} = -\vec{G}$ odnosno $F = G$; $F = BIl = \mu_0 HIl$; $G = mg$; $\mu_0 HIl = mg$; $I = \frac{mg}{\mu_0 Hl} = 9,8 \text{ A}$; Smjer sile i smjer struje je prikazan na crtežu ispod



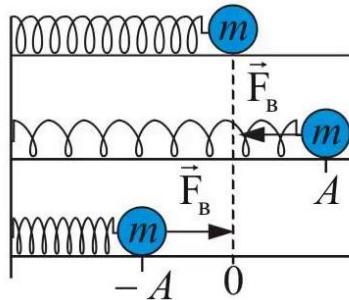
Crtež uz zadatak 11.

12. a) $I_s = 200 \text{ A}$; b) $I_p = 18,184$; 13. $I_p = 3 \text{ A}$; $I_s = 12 \text{ A}$; 14. a) $n_s = 300n_p$; $I = 6,67 \text{ A}$; b) $P = 66666,7 \text{ W}$; c) $U_p = 33,5 \text{ V}$; 15. $U_1:U_2 = N_1:N_2 \Rightarrow U_2 = 100 \text{ V}$; $P_2 = \frac{Q}{t}$; $Q = mc\Delta T$; $P_2 = U_2 I_2$; $mc\Delta T = U_2 I_2 \Rightarrow I_2 = 88,96 \text{ A}$; $I_1:I_2 = N_2:N_1 \Rightarrow I_1 = 2,9655 \text{ A}$; $R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 1,124 \Omega$



9. Oscilacije, talasi, zvuk

Pregled najvažnijih formula



Period oscilovanja

$$T = \frac{t}{N},$$

gdje je N broj oscilacija, a t vrijeme za koje se taj broj oscilacija desi.
Jedinica za period oscilovanja u SI je sekunda (s).

Frekvencija oscilovanja

$$f = \frac{N}{t}$$

Jedinica za frekvenciju u SI je $\frac{1}{s} = s^{-1} = \text{Hz}$ (herc).

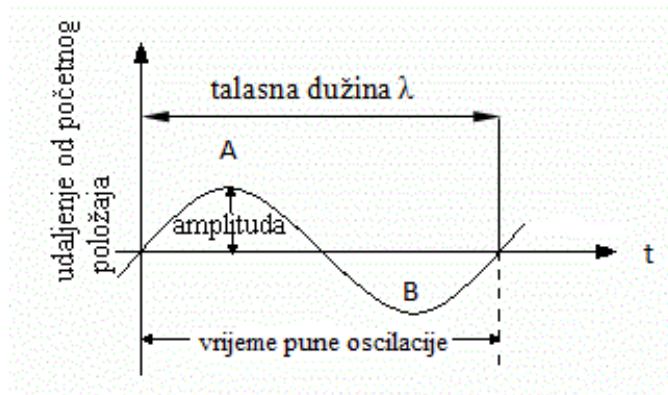
Period je vrijeme za koje oscilujuće tijelo napravi jednu punu oscilaciju, tj. za $N = 1$, $t = T$, pa je

$$f = \frac{1}{T}$$

Tada je i

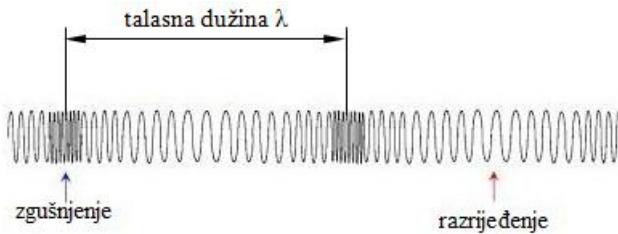
$$T = \frac{1}{f}$$

Transverzalni linijski talas (val)





Longitudinalni talas (val) na elastičnoj opruzi

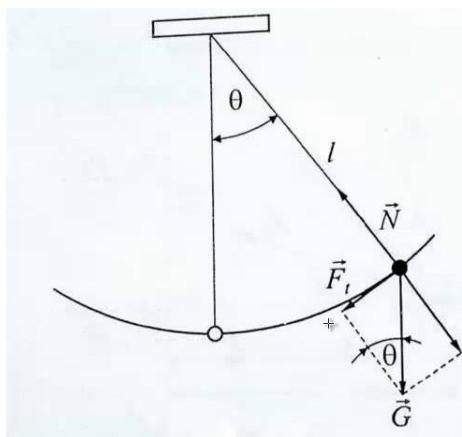


Formula koja nam daje vezu između talasne (valne) dužine, perioda i brzine prostiranja talasa često se naziva *osnovna zakonitost talasnog kretanja*

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f,$$

gdje je λ talasna (valna) dužina koja se izražava u metrima (m).

Matematičko klatno



Period oscilovanja matematičkog klatna

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

gdje je l dužina klatna, a g gravitaciono ubrzanje.

Period matematičkog klatna na koje osim sile teže djeluje jošneka druga silaokomito na smjer sile teže:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

Na osnovu formule za period oscilovanja matematičkog klatna možemo izračunati gravitaciono ubrzanje na mjestu na kojem klatno osciluje

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

Ljudsko uho registruje zvuk frekvencije u rasponu od 16 Hz do 20 000 Hz.

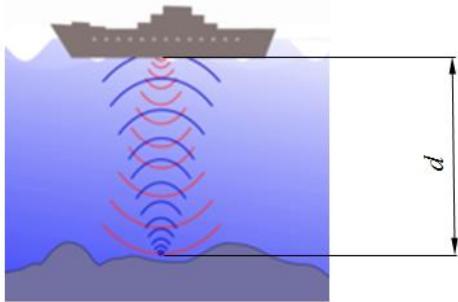
Zvuk frekvencije ispod 16 Hz nazivamo *infravuk*, a frekvencije iznad 20 kHz *ultrazvuk*.

Za brzinu zvuka u vazduhu pri normalnim uslovima obično se uzima vrijednost



$$v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ultrazvučni talasi se, između ostalog, koriste za određivanje udaljenosti neke prepreke (npr. dubine mora ili jezera)



$$d = \frac{v \cdot t}{2}$$

Zadaci za vježbu

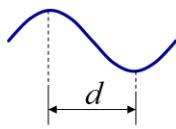
- Transverzalni harmonijski talas širi se uzduž horizontalnog pravca brzinom 5 m/s. Dvije najbliže čestice sredstva, od kojih je jedna u pozitivnom, a druga istodobno u negativnom amplitudnom položaju, međusobno su horizontalno udaljene 25 cm. Kolika je: a) talasna dužina i b) frekvencija talasa?

Rješenje:

$$v = 5 \text{ m s}^{-1}$$

$$\underline{d = 25 \text{ cm}}$$

a)



b)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{5 \text{ m s}^{-1}}{0,50 \text{ m}}$$

$$d = \frac{\lambda}{2}, \lambda = 2d = 2 \cdot 25 \text{ cm}$$

$$\lambda = 50 \text{ cm} = 0,50 \text{ m}$$

$$f = 10 \text{ Hz}$$

- Zvuk talasne dužine 77 cm prelazi iz vazduha u vodu. Kolika je talasna dužina zvuka u vodi? Za brzinu zvuka u vazduhu uzeti 340 m/s, a u vodi 1500 m/s.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \lambda_z &= 77 \text{ cm} = 0,77 \text{ m} & f_z &= f_v & \lambda_v &= \lambda_z \frac{v_v}{v_z} = 0,77 \text{ m} \cdot \frac{1500 \text{ m s}^{-1}}{340 \text{ m s}^{-1}} \\ v_z &= 340 \text{ m s}^{-1} & \underline{v_v} &= 1500 \text{ m s}^{-1} & \lambda_v &= 3,4 \text{ m} \\ \underline{\lambda_z} &= 77 \text{ cm} & \underline{\lambda_v} &= 3,4 \text{ m} \end{aligned}$$

- Kolike su najveća i najmanja talasna dužina zvučnih talasa koje čuje normalno uho ako je brzina zvuka u vazduhu 340 m/s?

Rješenje:

$$v = 340 \text{ m s}^{-1}$$

$$f_1 = 20 \text{ Hz}$$

$$\frac{f_2 = 20000 \text{ Hz}}{\lambda_1, \lambda_2 = ?}$$

$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$$

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{20 \text{ Hz}} \quad \lambda_2 = \frac{v}{f_2} = \frac{340 \text{ m s}^{-1}}{20000 \text{ Hz}}$$

$$\lambda_1 = 17 \text{ m}$$

$$\lambda_2 = 0,017 \text{ m} = 1,7 \text{ cm}$$

4. Talas u plitkoj vodi ima brzinu prostiranja 40 cm/s i talasnu dužinu 20 cm. Kada pređe u duboku vodu brzina prostiranja mu je 80 cm/s. Kolika je talasna dužina talasa u dubokoj vodi?

Rješenje:

$$v_1 = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\lambda_1 = 20 \text{ cm}$$

$$v_2 = 80 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

$$\lambda_2 = ?$$

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Frekvencija talasa se prilikom prelamanja ne mijenja:

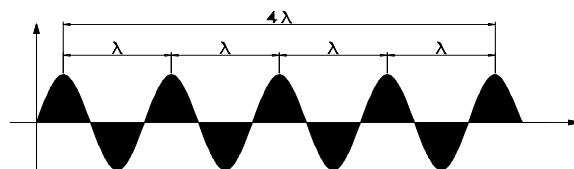
$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1 v_2}{v_1}; \lambda_2 = 40 \text{ cm}$$

5. Rastojanje između prvog i petog brijege kod transverzalnog linijskog talasa iznosi 4 m, a frekvencija oscilatora koji proizvodi talasno kretanje je 10 Hz. Kolika je brzina prostiranja ovog talasa?

Rješenje:

$$l = 4 \text{ m}$$

$$\frac{f = 10 \text{ Hz} = 10 \frac{1}{\text{s}}}{v = ?}$$



Na osnovu crteža proizilazi da rastojanje između prvog i petog brijege predstavlja četiri talasne dužine

$$l = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{l}{4} = 1 \text{ m}$$

$$v = \lambda \cdot f = 1 \text{ m} \cdot 10 \frac{1}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



6. Visinska razlika brijege i dola talasa koji se širi morskom površinom iznosi 120 cm, period 4 s i talasna dužina 25 m. Koliko je puta brzina talasa veća od brzine kretanja molekula morske vode?

Rješenje:

$$2y_o = 2r = 120 \text{ cm} = 1,2 \text{ m}$$

$$T = 4 \text{ s}$$

$$\lambda = 25 \text{ m}$$

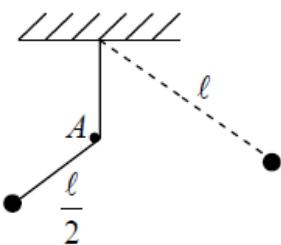
$$\frac{v_v}{v_m} = ?$$

$$v_m$$

$$\frac{v_v}{v_m} = \frac{\frac{\lambda}{T}}{\frac{2r\pi}{T}} = \frac{\lambda}{2r\pi} = \frac{25 \text{ m}}{1,20 \text{ m} \cdot \pi}$$

$$\frac{v_v}{v_m} = 6,6$$

7. Klatno dužine l osciluje na način prikazan na slici. Sa A je obilježen klin i on je zakucan na rastojanju $l/2$ od tačke vješanja kao na slici. Odredi period malih oscilacija za ovaj sistem. (*Regionalno takmičenje iz fizike učenika osnovnih škola Republike Srbije 2014. godine*)



Rješenje:

$$\text{Period oscilovanja matematičkog klatna dužine } l: T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1)$$

$$\text{Period oscilovanja matematičkog klatna dužine } l: T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \quad (2)$$

Dok klatno od desnog amplitudnog položaja stigne do tačke A (naiđe na klin) proteći će vrijeme $T_1/4$, a od tog trenutka dok stigne do lijevog amplitudnog položaja, proteći će vrijeme $T_2/4$. Zbir ta dva vremena jednak je polovini perioda oscilovanja T sistema.

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}}}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

8. O tanku neistegljivu nit dužine 1 m objesena je kuglica mase 200 mg nabijena nabojem $+1 \mu\text{C}$. Kuglica se nalazi u homogenom električnom polju jačine 1000 V/m. Izračunaj period oscilovanja kuglice ako su linije polja usmjerene horizontalno.

Rješenje:

$$l = 1 \text{ m}$$

$$m = 200 \text{ mg} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$q = 1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$$

Obzirom da su linije električnog polja usmjerene horizontalno, to je pravac električne sile okomit na pravac sile teže, pa je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

$$ma = qE \Rightarrow a = \frac{qE}{m} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\sqrt{\left(5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 + \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}}} = 1,89 \text{ s}$$

Zadaci za samostalan rad

1. Matematičko klatno dužine $l = 99,5 \text{ cm}$ za jednu minutu napravi $N = 30$ oscilacija. Odrediti period oscilovanja klatna i ubrzanje Zemljine teže na mjestu na kojem osciluje klatno.
2. Kolika je dužina klatna ako mu je frekvencija 4 Hz ?
3. Kako se odnose periodi ako dužinu klatna povećamo 2% ?
4. Talasna dužina zvuka je 17 cm pri brzini 340 m/s . Kolika je brzina širenja zvuka u sredstvu u kojem je, pri jednakoj frekvenciji kao u zraku, talasna dužina 102 cm ?
5. Zvuk se u željezu širi brzinom od 5100 m/s . Koliko puta je veća brzina zvuka u željezu nego u vazduhu? Za koliko će zvuk prije *stići* na rasojanje od 1 km prostirući se kroz željeznu šinu nego kroz vazduh?
6. Na obali jezera za $2,5 \text{ s}$ udarilo je 10 bregova nekog talasa, talasne dužine 5 decimetara . Izračunati frekvenciju, period i brzinu širenja talasa.
7. Površinom jezera širi se talasi talasne dužine 20 m . Pokraj posmatrača na obali jezera prođu u jednoj sekundi dva susjedna briješta talasa. Kolika je brzina širenja talasa?
8. Slijepi miš koji se nalazi na rastojanju 100 m od stijene emituje talase talasne dužine 4 mm . Odredi vrijeme nakon kojeg će slijepi miš registrovati echo (odbijeni talas). Da li čovjek normalnog sluha može da čuje te talase? Za brzinu zvuka u vazduhu uzeti $c = 340 \text{ m/s}$.
9. Dva matematička klatna jednovremeno osciluju. Za isto vrijeme jedno napravi 15 oscilacija a drugo 10 oscilacija. Nađi odnos dužina klatna.
10. Kuglica malih dimenzija nalazi se unutar sferne površine poluprečnika $0,981 \text{ m}$ koja leži na horizontalnom stolu. Izračunati frekvenciju malih oscilacija kuglice.
11. Tačka vješanja matematičkog klatna kreće se u vertikalnoj ravni stalnim ubrzanjem $a = 2 \text{ m/s}^2$ usmjerenim horizontalno. Koliki je odnos perioda oscilovanja tog klatna u odnosu na period oscilovanja kada njegova tačka vješanja miruje. Uzeti da je $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Rješenja zadataka za samostalan rad: **1.** $t = 30 \text{ s}$; $g = 9,82 \text{ m/s}^2$; **2.** $L = 1,55 \text{ cm}$; **3.** $T_2/T_1 = 1,01$; **4.** $v_2 = 2040 \text{ m/s}$; **5.** 15 puta; $t=2,75 \text{ s}$; **6.** $f=4\text{Hz}$; $T=0,25\text{s}$; $v=2 \text{ m/s}$; **7.** $v = 20 \text{ m/s}$; **8.** $t \approx 0,59 \text{ s}$; $f = 85 \text{ kHz}$ – ne može da čuje; **9.** $l_1/l_2 = 4/9$; **10.** uputstvo: postoji potpuna sličnost kretanja kuglice sa kuglicom matematičkog klatna, $f = 0,503 \text{ Hz}$; **11.** Period klatna čija se tačka vješanja kreće je

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}, \text{ pa je traženi odnos perioda } \frac{T_1}{T} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = 0,99$$



10. Optika

Pregled najvažnijih formula

Optika je grana fizike koja proučava svjetlost i osobine svjetlosti, optičke instrumente, sredstva za poboljšanje vida (optička sočiva), ogledala (geometrijska optika) i talasnu prirodu svjetlosti (talasna optika).

Postoje dvije glavne grane optike, a to su:

1. talasna optika i
2. geometrijska optika.

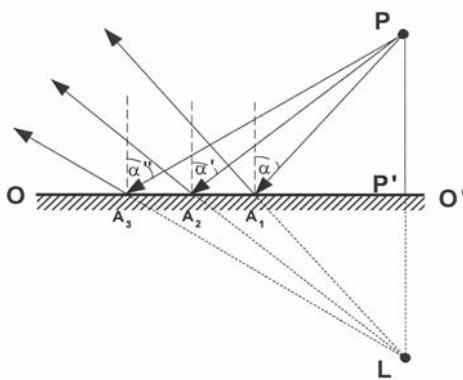
Talasna optika se primarno bavi prirodom i osobinama same svjetlosti.

Oblast optike koja pručava prostiranje svjetlosti kroz različite sredine ne vodeći računa o njenoj prirodi i koja se zasniva na pojmu svjetlosnog zraka naziva se **geometrijska optika**.

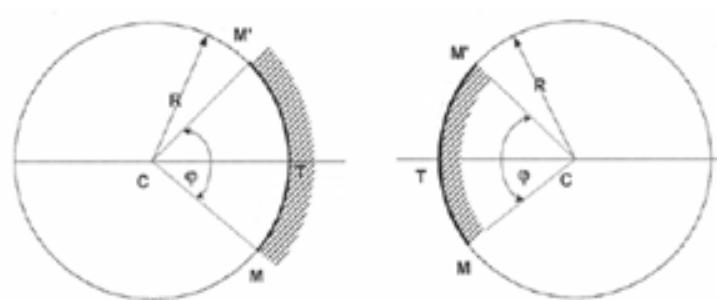
RAVNA I SFERNA OGLEDALA

Uglačane ravne površine koje odbijaju najveći dio upadnih zraka nazivaju se ravna ogledala (mirna površina vode, staklo, ogledalo).

Neka je OO' ravno ogledalo, a P svijetli tačasti predmet (Slika 1). Svi svjetlostni zraci iz tačke P koji padaju na ogledalo odbiće se prema zakonu odbijanja. Svi zraci su poslije odbijanja divergentni i to tako kao da dolaze iz zamišljene tačke L koja se nalazi iza ogledala. Tačka L naziva se lik tačke P . Njen položaj je simetričan sa položajem tačke P u odnosu na ogledalo. Pošto se u tački L ne sjeku odbijeni zraci nego njihovi geometrijski produžeci, takav lik se naziva imaginaran ili zamišljen. Taj lik je na istom rastojanju od ogledala kao i predmet.



Slika 1. Ravno ogledalo.



Slika 2. Sferna ogledala: a) Izdubljeno (konkavno), b) Ispupčeno (konveksno) ogledalo

Sferna ogledala predstavljaju uglačane djelove (odsječke) sfernih površina (kašika, metalna šipka, metalna cijev). Postoje izdubljena ili konkavna, i ispučena ili konveksna sferna ogledala (Slika 2). Ugao φ naziva se ugaoni otvor ogledala. Elementi sfernog ogledala su: tačka C je centar krivine, r je poluprečnik krivine, a tačka T je tjeme ogledala. Prava koja prolazi kroz centar krivine C i tjeme T naziva se glavna optička osa ogledala. Tačka F se naziva žiža ili fokus ogledala i u njoj se



svi paralelni upadni zraci poslije odbijanja sjeku. Žiža se nalazi na glavnoj optičkoj osi, a njeno rastojanje od tjemena ogledala do žiže naziva se žižna duljina. Žižna duljina jednaka je polovini poluprečnika krivine $f = \frac{R}{2}$.

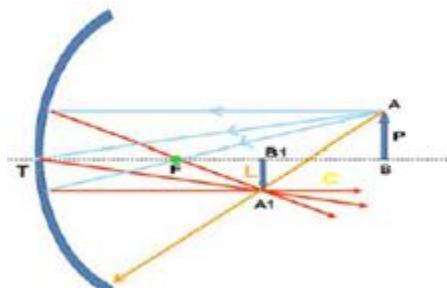
Konkavna ogledala

Ogledala kod kojih svjetlost pada na izdubljenu površinu sfere su konkavna ogledala.

U zavisnosti od položaja predmeta i tjemena ogledala, lik predmeta može da bude realan ili imaginaran, uvećan ili umanjen, uspravan ili obrnut. Kada se predmet nalazi ispred centra krivine izdubljenog ogledala, tada je: $s>0$, $f<0$ i $s'<0$, lik je realan, nalazi se između žiže i centra krivine, obrnut je i umanjen (Slika 3). Kada se predmet nalazi između centra krivine i žiže lik je uvećan (Slika 4).

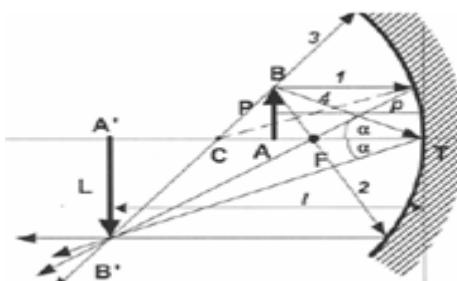
Jednačina konkavnih ogledala glasi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \quad u = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p}$$



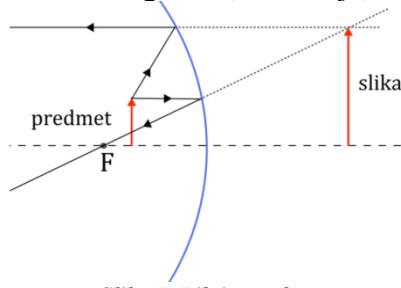
Slika 3. Pravila za konstrukciju lika kod sfernog ogledala.

Linearno uvećanje:



Slika 4. Uvećanje ogledala

Kada se predmet nalazi između tjemena izdubljenog ogledala, tada je: $s>0$, $f<0$ i $s'>0$, lik se nalazi iza ogledala, uvećan je, uspravan i imaginaran (Slika 5).



Slika 5. Lik je uvećan, uspravan i imaginaran.

Konveksna ogledala

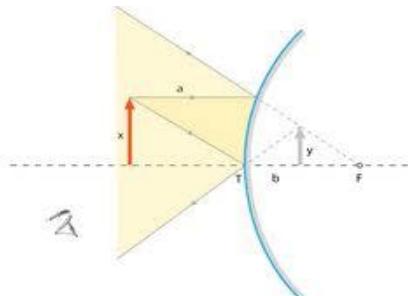
Kod ovih ogledala svjetlost pada na spoljašnju stranu sfere. Za konveksna ogledala je karakteristično da se centar krivine C i žiža F nalaze iza ogledala. Takođe, važi da je žižna duljina jednaka polovini poluprečnika krivine $f = \frac{R}{2}$. Svjetlosni zraci koji padaju paralelno optičkoj osi poslije odbijanja su divergentni i njihovi produžeci se sjeku u žiži (Slika 6).

Jednačina konveksnih ogledala glasi:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{l}$$

Linearno uvećanje:

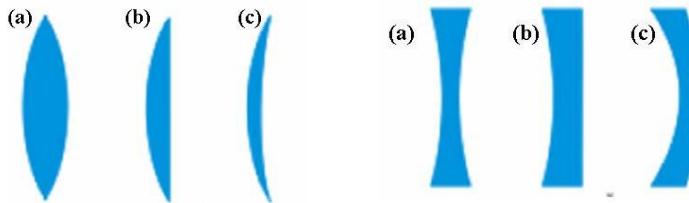
$$u = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p}$$



Slika 6. Pravila za konstrukciju lika kod konveksnog ogledala.

SOČIVA

Optičko sočivo je tjelo izgrađeno od providnog homogenog materijala, ograničeno sa dvije sferne ili barem jednom sfernom i jednom ravnom površinom. Prema obliku i osobinama sočiva se djele na: sabirna (konvergentna)(Slika 1) i rasipna (divergentna)(Slika 2).



Slika 1. Sabirna sočiva (konvergentna) – a) bikonveksno, Slika 2. Rasipna sočiva (divergentna) – a) bikonkavno, b) plan-konveksno, c) meniskus: konkavno -konveksno

Ovakva podjela sočiva je moguća jedino u slučaju kad zrak prelazi iz optički rjeđe u optički gušću sredinu. U obrnutom slučaju sabirna sočiva se ponašaju kao rasipna, a rasipna kao sabirna. Na slici 3 prikazano je prelamanje svjetlosti kroz sabirno i rasipno sočivo.

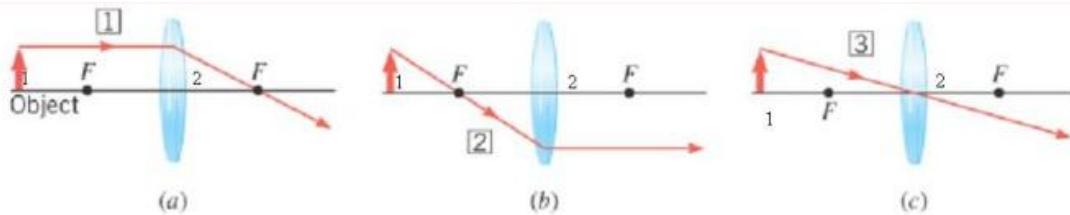


Slika 3. Prelamanje svjetlosti kroz sabirno i rasipno sočivo.

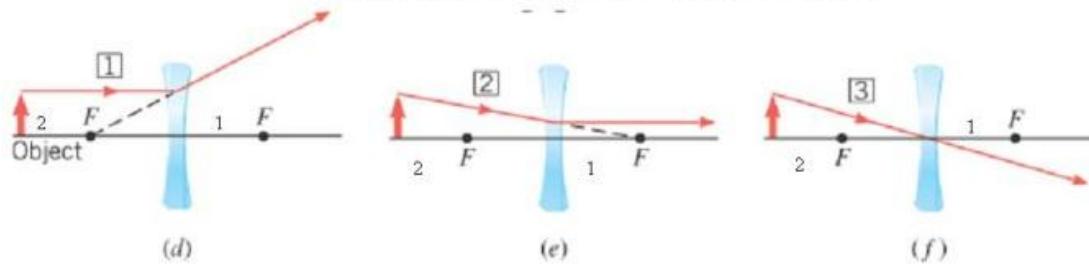
U optici se često koristi veličina koja se naziva **optička moć sočiva**.

$$\omega = \frac{1}{f} \text{, a jedinica je dioptirja D (m}^{-1}\text{)}$$

Za konstrukciju lika kod tankih sočiva koristimo tri karakteristična zraka. Kod debelih sočiva konstrukcija lika nije ista kao kod tankih sočiva.



Tri karakteristična zraka kod sabirnih sočiva



Tri karakteristična zraka kod rasipnih sočiva

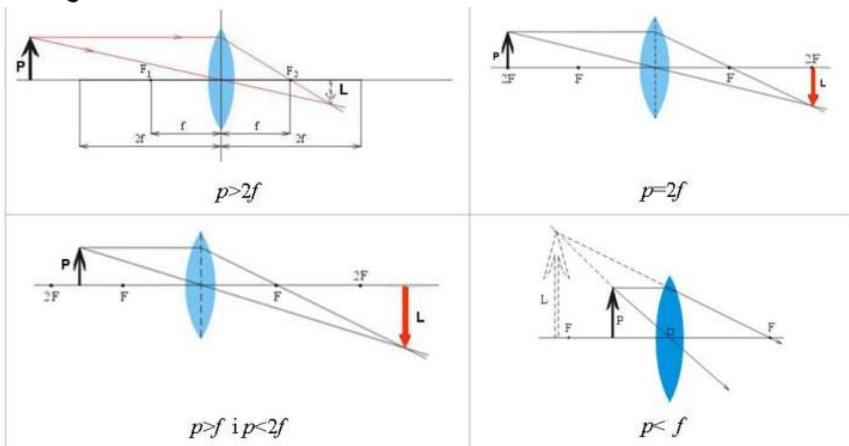
Tri karakteristična zraka su:

1. Upadni zrak paralelan glavnoj optičkoj osi posle prelamanja prolazi kroz žiju
2. Zrak koji prolazi kroz žiju, poslije prelamanja je paralelan glavnoj optičkoj osi
3. Ako upadni zrak prolazi kroz centar sočiva prelomni zrak prolazi bez prelamanja

Na slikama označene su žiže koje se nalaze na različitim mjestima u zavisnosti da li je rječ o sabirnim ili rasipnim sočivima.

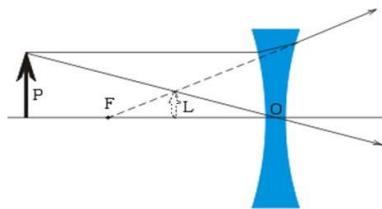
Za konstrukciju lika kod sočiva dovoljna su bilo koja dva zraka od tri karakteristična zraka. Postoje četiri slučaja konstrukcije lika kod sabirnih sočiva:

1. $p > 2f$, tada je lik umanjen, obrnut, realan, nalazi se sa suprotne strane sočiva u odnosu na predmet gde je $2f >l>f$
2. $p=2f$, tada je lik obrnut, realan, iste veličine kao i predmet, nalazi se sa suprotne strane sočiva u odnosu na predmet i $p=l$
3. $f < p < 2f$, tada je lik obrnut, uvećan, realan nalazi se sa suprotne strane sočiva u odnosu na predmet i $l > 2f$
4. $p < f$, tada je lik uvećan, uspravan, imaginaran, nalazi se sa iste strane sa koje je i predmet i može se vidjeti kroz sočivo.



Konstrukcija lika kod konvergentnih sočiva

Dobijeni lik kod rasipnog sočiva uvijek je imaginaran, uspravan i umanjen.



Konstrukcije lika kod rasipnog sočiva

Imaginarni lik se dobija u produžetku divergentnih zraka. Ne možemo ga uhvatiti na zaklonu već ga vidimo kroz sočivo.

Uvećanje sočiva se definiše kao odnos veličine lika i predmeta: , to jest jednako je absolutnoj vrijednosti odnosa rastojanja lika i predmeta od sočiva.

Optička jednačina sočiva je ista kao i jednačina ogledala.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f}$$



Zadaci za vježbu

- Svjetli predmet nalazi se na rastojanju $p=2f/3$ od konveksnog ogledala. Kakav će biti i gdje će se nalaziti lik ovog predmeta?

Rješenje:

$$p = 2f/3$$

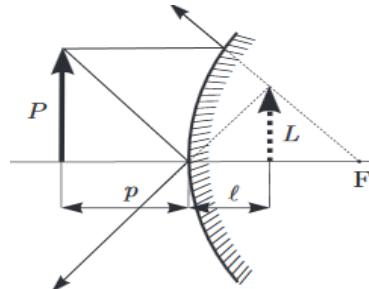
Jednačina konveksnog ogledala ima oblik:

$$-\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\ell}, \quad \ell = \frac{p \cdot f}{p + f}, \quad \text{tj.} \quad \ell = \frac{2}{5} f$$

Uvećanje ogledala je:

$$u = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p} = \frac{3}{5} < 1$$

Lik je uspravan, umanjen i imaginaran.



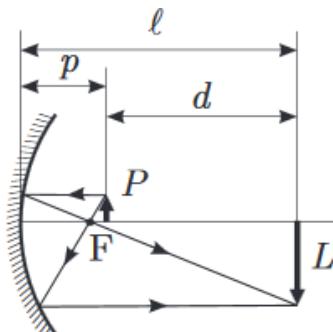
- Konkavno sferno ogledalo daje realan lik koji je tri puta veći od predmeta. Kolika je žižna duljina ogledala, ako je rastojanje između predmeta i njegovog lika $d = 20 \text{ cm}$?

Rješenje:

$$d = 20 \text{ cm}, f = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\ell}, \quad f = \frac{p \cdot \ell}{p + \ell} \quad (2)$$

$$u = \frac{L}{P} = \frac{\ell}{p} = 3 \quad (3)$$



Sa slike se vidi veza: $\ell - p = d$,

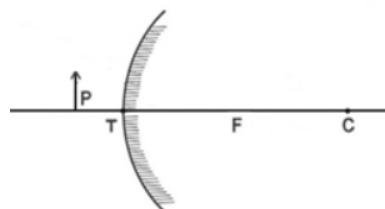
Rješavanjem sistema jednačina (2) i (3) dobija se:

$$p = \frac{d}{u-1} \quad \text{i} \quad \ell = d \cdot \frac{u}{u-1}$$

Zamjenom ovih izraza u (1), za žižnu duljinu se dobija:

$$f = \frac{u \cdot d}{(u+1)(u-1)} = 7,5 \text{ cm}$$

- Predmet visine 1 m nalazi se na udaljenosti 6 m od tjemena ispuštenog ogledala žižne duljine 6 m. a) Konstruiši lik predmeta i odredi njegovu udaljenost od tjemena ogledala. b) Kolika je visina lika i kakve su mu karakteristike?

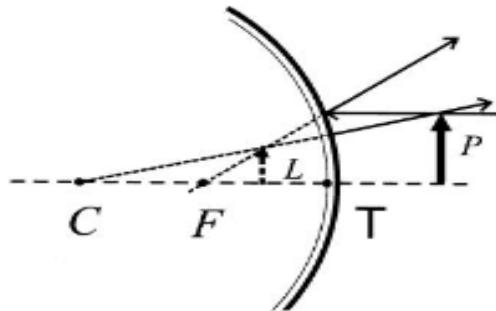




Rješenje:

$$f = 6 \text{ m}, P = 1 \text{ m}, p = 6 \text{ m}$$

a) *Iz jednačine za određivanje žižne duljine:* $-1/f = 1/p - 1/l$ slijedi: $1/l = 1/f + 1/p$, $l = p * f / (f + p)$, $l = 3 \text{ m}$



b) *Veličina lika računa se iz izraza za uvećanje:*

$$u = \frac{L}{P} = \frac{l}{p}, \quad L = \frac{l}{p} \cdot P, \quad L = 0.5 \text{ m}$$

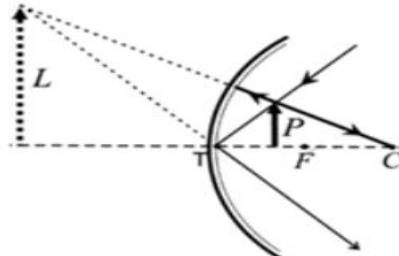
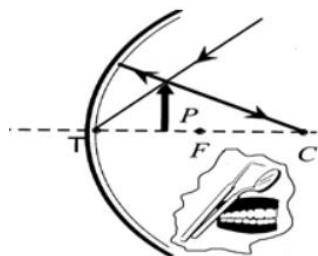
Karakteristike lika: uspravan, umanjen, imaginaran.

4. Zub visine 0,5 cm nalazi se na udaljenosti 5 mm od tjemena zubarskog ogledala. Poluprečnik krivine ogledala je 1,5 cm. a) Koje su karakteristike lika koji vidi zubar? b) Konstrukcijom i računski odredi udaljenost lika od tjemena ogledala.

Rješenje:

Dati podaci:

$$R = 1.4 \text{ cm}, P = 0.5 \text{ cm}, p = 5 \text{ mm} = 0.5 \text{ cm}$$



Konstrukcija:

a) Kada se predmet nalazi između tjemena ogledala i njegove žižne duljine onda se dobija lik sa sljedećim karakteristikama: **uspravan, uvećan, imaginaran.**

b) $f = R/2 = 0.7 \text{ cm}$

Iz uslova pod a) jednačina za određivanje žižne duljine je: $1/f = 1/p - 1/l$, te je udaljenost lika: $1/l = 1/p - 1/f$ odakle slijedi $l = f * p / (f - p) = 1.8 \text{ cm}$

$$L = \frac{l}{p} \cdot P; L = 1.8 \text{ cm}$$

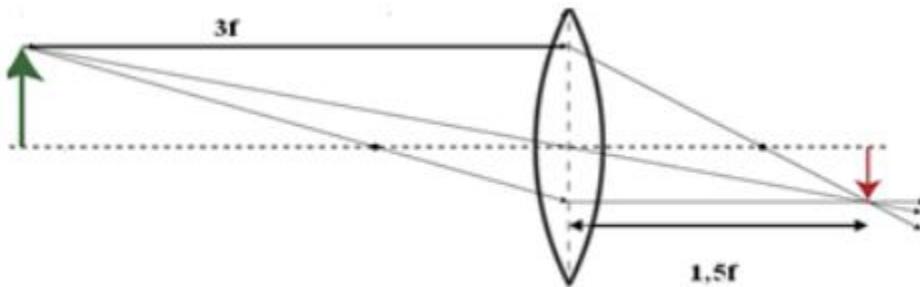
5. Ispred sabirnog sočiva postavljen je predmet. Žižna duljina sočiva je 300 mm, a duljina predmeta 0,9 m. Odredi mjesto lika konstrukcijom i provjeri računski.



Rješenje:

$$f = 300 \text{ mm} = 30 \text{ cm}, p = 0.9 \text{ m} = 90 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} &= \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{p \cdot f} \\ l &= \frac{p \cdot f}{p-f} = \frac{90\text{cm} \cdot 30\text{cm}}{90\text{cm} - 30\text{cm}} = 45\text{cm}\end{aligned}$$

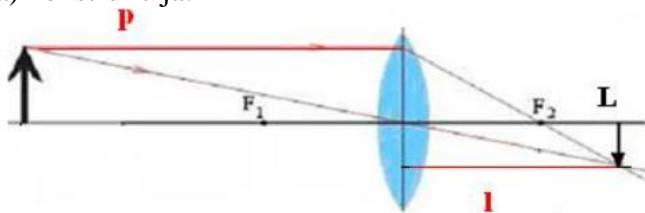


6. Predmet je udaljen 0,8m od sabirnog sočiva žižne daljine 20 cm. Koliko su udaljeni lik i predmet jedan od drugog? Zadatak rješiti: a) konstrukcijski, b) računski.

Rješenje:

$$f = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}, p = 0,8 \text{ m} = 90 \text{ cm}$$

a) Konstrukcija:



- b) Računski: $f = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}, p = 0,8 \text{ m}, d = p + l,$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{p-f}{p \cdot f} \quad l = \frac{p \cdot f}{p-f} \\ l &= \frac{p \cdot f}{p-f} = \frac{0,8\text{m} \cdot 0,2\text{m}}{0,8\text{m} - 0,2\text{m}} = 0,27\text{m} \\ d &= 0,8\text{m} + 0,27\text{m} = 1,07\text{m}\end{aligned}$$

7. Kolika je optička moć (jačina) sočiva ako ono daje realan lik koji je na rastojanju 20 cm od sočiva? Predmet je udaljen od sočiva 50 cm.

Rješenje:

$$l = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$p = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

Optička moć sočiva jednaka je recipročnoj vrednosti žižne daljine: $\omega = 1/f$
Jedinica za dioptriju: $1 \text{ dioptrija} = 1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ D}$

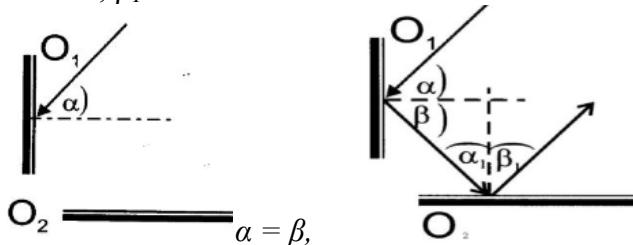


$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}, \quad \frac{1}{f} = \frac{10}{5m} + \frac{10}{2m} = \frac{70}{10m} = 7m^{-1} = 7 \text{ dioptira}$$

8. Dva ravna ogledala postavljena su pod pravim uglovom. Na jedno od njih pada svjetlosni zrak pod uglovom od 50° . Skiciraj put zraka i odredi odbojni ugao kod drugog ogledala.

Rješenje:

$$\alpha = 50^\circ, \beta_1 = ?$$



$$\text{Sa crteža se vidi da je: } \beta + \alpha_1 + 90^\circ = 180^\circ, \quad \beta_1 = \alpha_1,$$

$$\alpha = \beta = 50^\circ$$

$$\beta + \alpha_1 + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha_1 = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

$$\beta_1 = \alpha_1 = 40^\circ$$

9. Predmet je na rastojanju 30 cm od sabirnog sočiva žižne daljine 10 cm. Kako i koliko treba pomjeriti predmet da bi se njegov lik približio sočivu za 3 cm?

Rješenje:

$$p_1 = 30 \text{ cm}$$

$$f = 10 \text{ cm}$$

$$d = 3 \text{ cm}, \quad \Delta p = ?$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{l_1}, \quad l_1 = \frac{p_1 \cdot f}{p_1 - f} = \frac{30 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}}{30 \text{ cm} - 10 \text{ cm}} = 15 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{l_1 - d} \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{l_1 - d} = \frac{1}{10 \text{ cm}} - \frac{1}{15 \text{ cm} - 3 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{120 \text{ cm}^2}, \quad p_2 = 60 \text{ cm},$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = 60 \text{ cm} - 30 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$$

10. Ispred sabirnog sočiva optičke moći 5 dioptrija nalazi se predmet na rastojanju 30 cm od sočiva. Kako će se pomjeriti lik ako se sočivo zamjeni drugim čija je optička moć 10 dioptrija?

Rješenje:

$$\omega_1 = 5 \text{ dioptrija (D)}$$

$$p = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$$

$$\omega_2 = 10 \text{ dioptrija (D)}$$

$p_1 = p_2 = p$, $d = ?$

$$\omega = 1/f,$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l},$$

$$1/l = \omega - 1/p, \quad 1/l_1 = \omega_1 - 1/p,$$

$$\frac{1}{l_1} = 5m^{-1} - \frac{10}{3}m^{-1} = \frac{5}{3}m^{-1}, \quad l_1 = \frac{3}{5}m = 0,6m$$

$$1/l_2 = \omega_2 - 1/p,$$

$$\frac{1}{l_2} = 10m^{-1} - \frac{10}{3}m^{-1} = \frac{20}{3}m^{-1}, \quad l_2 = \frac{3}{20}m = 0,15m$$

Kako je l_2 manje od l_1 , znači da će se lik pomjeriti ka predmetu za:

$$d = l_1 - l_2 = 0,45\text{ m}$$

11. Izdubljeno ogledalo uvećava 5 puta. Kolika je udaljenost predmeta i lika ako je poluprečnik zakriviljenosti ogledala 24 cm?

Rješenje:

$$U = 5, \quad r = 24\text{ cm}, \quad p = ?, \quad l = ?$$

$$u = \frac{l}{p}$$

$$l = u \cdot p$$

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{5 \cdot p} = \frac{5+1}{5 \cdot p}$$

$$\frac{r}{2} = \frac{5 \cdot p}{6}$$

$$5 \cdot p = \frac{6 \cdot r}{2}$$

$$p = \frac{3 \cdot r}{5} = \frac{3 \cdot 24\text{ cm}}{5} = 14,4\text{ cm}$$

$$l = 5 \cdot 14,4 = 72\text{ cm}$$

12. Imaginarni lik predmeta koji se nalazi na optičkoj osi konkavnog ogledala uvećan je tri puta. Koliko je rastojanje predmeta i lika? Poluprečnik krivine ogledala je 90 cm.

Rješenje:

$$r = 90\text{ cm}, \quad f = r/2 = 45\text{ cm}, \quad u = 3, \quad d = ?$$

$$u = \frac{l}{p}$$



$l = u \cdot p$, lik je imaginaran pa je: $l = -u \cdot p = -3 \cdot p$

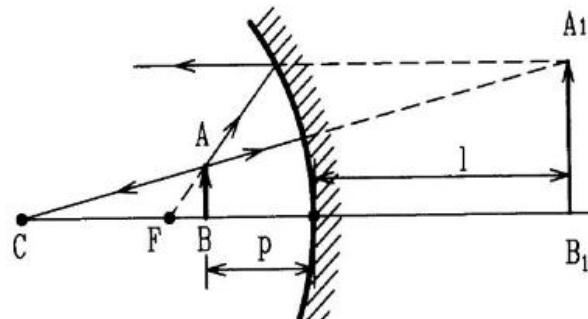
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} - \frac{1}{u \cdot p} = \frac{2}{3 \cdot p}$$

$$3 \cdot p = 2 \cdot f$$

$$p = \frac{2 \cdot f}{3} = 30 \text{ cm}.$$

$$l = -3 \cdot 30 \text{ cm} = -90 \text{ cm}$$

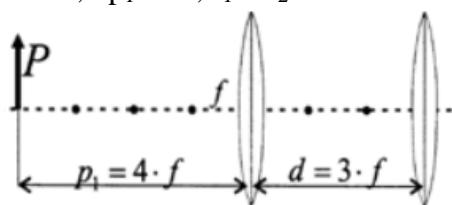


$$d = p + |l| = 30 \text{ cm} + 90 \text{ cm} = 120 \text{ cm}$$

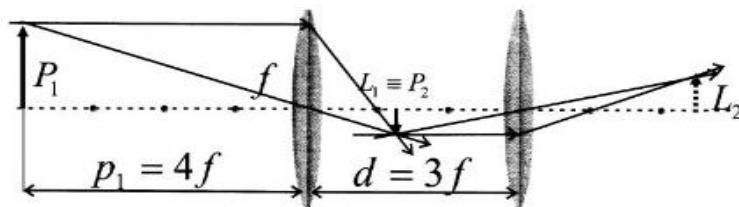
13. Dat je sistem dva identična sočiva ($f_1 = f_2 = f$), na rastojanju $d = 3f$ kao na crtežu. Ako je predmet na rastojanju $p_1 = 4f$ ispred prvog sočiva, kakav će biti lik koji daje ovaj sistem sočiva? Do rezultata doći isključivo konstrukcijom.

Rješenje:

$$d = 3f, \quad p_1 = 4f, \quad f_1 = f_2 = f$$

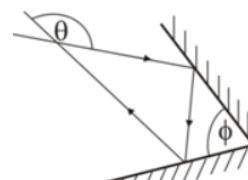


Za izradu ovog zadatka potrebno je upotrijebiti karakteristične zrake kod sabirnih sočiva za konstrukciju lika. Ovaj zadatak spada u kompleksne zadatke koji od učenika zahtjevaju teorijska znanja za pravilnu konstrukciju i uočavanje karakteristika lika na osnovu konstrukcije.



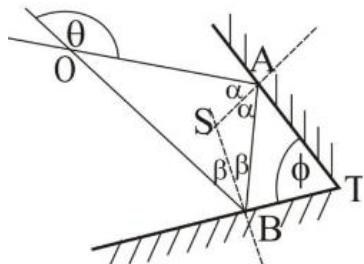
Lik je: uspravan, umanjen, realan.

14. Dva ravna ogledala čine ugao θ . Svjetlosni zrak ulazi u ovaj sistem i odbija se po jednom od svakog ogledala. Naći ugao za koji se zrak zakrene nakon oba odbijanja.





Rješenje:



Sa slike vidimo da je ugao $\angle BAT = 90^\circ - \alpha$, te slijedi da je ugao

$$\angle ABT = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \varphi + \alpha.$$

Sada se ugao β može izraziti kao: $\beta = 90^\circ - \angle ABT = \varphi - \alpha$.

Iz trougla ΔAOB zaključujemo da je: $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ - 2\varphi$

odakle slijedi: $\theta = 2\varphi$ ili $0 = 360^\circ - 2\varphi$.

$$\angle BAT = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{yrao } \angle ABT = 180^\circ - \varphi - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \varphi + \alpha.$$

$$\beta = 90^\circ - \angle ABT = \varphi - \alpha.$$

$$\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 180^\circ - 2\varphi \quad , \quad \theta = 2\varphi \text{ ili } \theta = 360^\circ - 2\varphi.$$

15. Optički sistem se sastoji od sabirnog sočiva žižne duljine 30 cm i rasipnog sočiva žižne duljine 20 cm koji imaju zajedničku glavnu optičku osu. Na sabirno sočivo pada paralelan snop zraka i nakon prolaska kroz optički sistem snop ostaje paralelan. Naći rastojanje između sočiva.

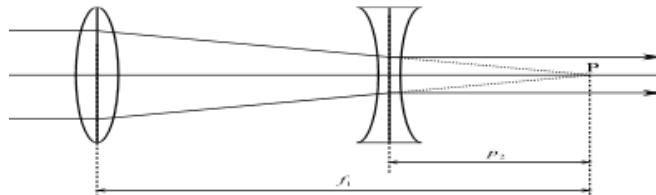
Rješenje:

$$f_1 = 30 \text{ cm}, f_2 = 20 \text{ cm}, d = ?$$

Lik rasipnog sočiva se nalazi u beskonačnosti, te jednačina rasipnog

$$\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{p_2} + 0$$

sočiva izgleda: $\frac{1}{f_2} = -\frac{1}{p_2}$



$$\text{odakle sljedi: } p_2 = -f_2$$

$$\text{Sa slike se vidi da je: } d = f_1 - p_2 = f_1 + f_2 = 30 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

16. Neki kratkovidni čovjek može jasno da vidi predmete (da akomodira oko) na rastojanjima od $a_1 = 16 \text{ cm}$ do $a_2 = 80 \text{ cm}$, dok udaljene predmete ne može jasno da vidi. Ako nosi odgovarajuće naočare, on jasno vidi udaljene predmete. Koliko je najmanje rastojanje između knjige i njegovih očiju kada čita pomoću tih naočara, a da pri tom jasno vidi tekst?

Rješenje:

$$a_1 = 16 \text{ cm}, \quad a_2 = 80 \text{ cm}$$

Kratkovidom čovjeku su potrebne naočare sa rasipnim sočivom pošto se lik predmeta formira ispred mrežnjače. Pošto čovjek jasno vidi između datih rastojanja onda važi:



$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{l} \quad i \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{l},$$

gdje je l dubina oka, f_1 i f_2 žižne duljine sočiva oka u ta dva slučaja. Kada čovjek nosi naočare čija je žižna duljina negativna, onda je za udaljene predmete:

$$\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_N} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{l} = \frac{1}{l},$$

Za traženu najmanju duljinu x :

$$\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_N} = \frac{1}{x} + \frac{1}{l}$$

Oduzimanjem prve dvije jednačine dobija se:

$$\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}$$

Oduzimanjem druge dve dobija se:

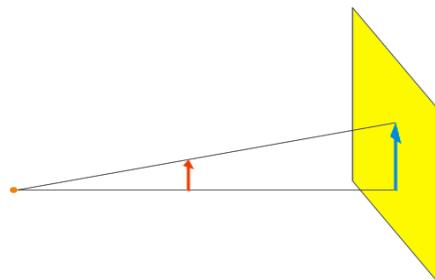
$$\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} = \frac{1}{x}$$

Izjednačavanjem se dobija:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \Rightarrow x = \frac{a_1 \cdot a_2}{a_2 - a_1}; x = 20 \text{ cm}$$

Zadaci za samostalan rad

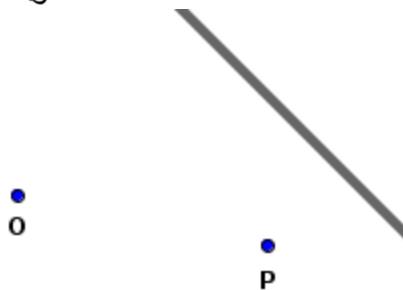
- Putnički mlazni avion „Boing“ kreće se prosječnom brzinom od 1200 km/h neprekidno pet sati. Za koje bi vrijeme taj put prešla svjetlost? ($c=300\ 000 \text{ km/s}$).
- Može li svjetlosni signal stići sa Zemlje do Marsa za 2 minute ako je njihovo rastojanje približno 55 miliona kilometara?
- Pred zaklonom se nalazi predmet visine 20 cm. Rastojanje od predmeta do izvora svjetlosti je 80 cm. Visina sjenke dobijene na zaklonu je 30 cm. Računski i grafički odredi udaljenost izvora svjetlosti od zaklona. Pri konstrukciji crteža uzmi omjer 1:20.



- Koliko treba da je udaljen predmet od udubljenog ogledala da bi se dobila njegova realna slika tri puta uvećana. Žižna duljin ogledala je 0,3 m.
- Kolika je žižna duljina konkavnog ogledala koje stvara imaginarnu sliku ako je $a = 10 \text{ cm}$ i $b = 30 \text{ cm}$?
- Ispred udubljenog sfernog ogledala čiji je poluprečnik krivine 60 cm nalazi se uspravljenja kutija šibica. Slika joj se obrazuje na rastojanju 120 cm od tjemena ogledala, a visina joj je 15 cm.

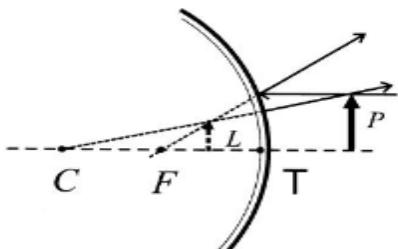


- a) Na kojoj je udaljenosti od ogledala kutija?
 - b) Kolika je njena visina?
 - c) Koliko je uvećanje slike?
 - d) Gdje se nalazi kutija u odnosu na žiju i tjeme ogledala?
7. Upaljena svijeća je postavljena na rastojanju 20 cm od tjemena konkavnog sfernog ogledala čiji je poluprečnik 60 cm. Kolika je visina slike plamena svijeće ako je plamen visok 4 cm?
8. Predmet visine 8 cm udaljen je od konkavnog ogledala 12 cm. Ogledalo ima poluprečnik zakriviljenosti 20 cm. Odredi visinu slike.
9. Konkavno sferno ogledalo daje tri puta uvećanu i obrнутu sliku od predmeta. Slika i predmet su udaljeni 16 cm. Kolika je žižna duljina ogledala?
10. Optička jačina sabirnog sočiva je 2,5 D. Predmet se nalazi 60 cm od sočiva. Na kolikom se rastojanju od sočiva nalazi slika predmeta?
11. Osvijetljeni predmet se nalazi 80 cm daleko od sabirnog sočiva, a njegova slika 20 cm od sočiva. Nakojoj udaljenosti će se nalaziti slika ako se rastojanje predmeta od sočiva smanji za polovinu?
12. Predmet je udaljen 1,5m od zaslona. Između predmeta i zaslona nalazi se sabirno sočivo postavljeno tako da se na zaslonu dobije realna slika 2 puta veća od predmeta. Kolika je optička jačina sočiva?
13. Predmet se nalazi na rastojanju $p = 15$ cm od tjemena konkavnog ogledala na glavnoj optičkoj osi. Stvaran lik predmeta se dobije na rastojanju $l = 30$ cm od ogledala. Na koju stranu i za koliko će se pomjeriti lik predmeta, kada se predmet približi ogledalu za $\Delta p = 1\text{cm}$?
14. Pri određenom položaju lik predmeta u izdubljenom ogledalu tri puta je manji od predmeta. Ako se predmet pomjeri za $d = 0,15$ m bliže ogledalu, onda je lik 1,5 puta manji od predmeta. Kolika je žižna duljina ogledala?
15. Ukras za jelku je oblika sfere i ima prečnik 95 mm. a) Odredi položaj lika dječaka koji je udaljen 2 m od ukrasa. b) Ako je dječak visok 1.3 m, koliko iznosi visina njegovog lika?
16. Na raskrsnicama puteva postavlja se konveksno ogledalo koje daje umanjene likove predmeta. Koliki treba da bude poluprečnik krivine ogledala da bi lik autobusa udaljenog 10 m bio umanjen 10 puta. Zadatak rješiti računski i konstrukcijski.
17. Koliki je indeks prelamanja sredstva, ako svjetlosni signal prijeđe u tom sredstvu udaljenost 1.5 m za $0.0075 \mu\text{s}$?
18. Ispred sabirnog sočiva žižne duljine 20 cm stavljen je svijetli predmet na udaljenost 60 cm od tjemena, pa se dobije realna slika predmeta. Ako se na mjesto sočiva stavi sferno ogledalo, koliki mora biti njegov poluprečnik zakriviljenosti da se dobije virtualna slika svjetlog predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena sočivom?
19. Zraka svjetlosti dolazi na ravno ogledalo pod upadnim uglom 25° . Koliki je ugao između upadne i reflektirane zrake?
20. Slika prikazuje predmet P i ravno ogledalo.



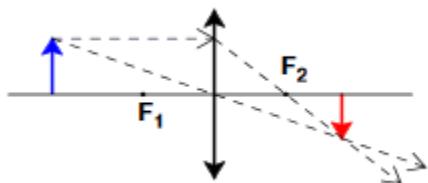
Hoće li opažač, čiji je položaj oka naznačen tačkom O, vidjeti sliku predmeta u ogledalu? Naznačite na slici put svjetlosti od predmeta do opažača kao obrazloženje svojega odgovora

Rješenja zadataka za samostalan rad: **1.** $t = 0,02 \text{ s}$; **2.** Neće stići za dvije minute već za približno tri minute, $t = 183 \text{ s}$; **3.** Računski: $20:30 = 80:(80+x)$, $x = 40 \text{ cm}$; **4.** $\frac{1}{30} = \frac{1}{a} + \frac{1}{3a}$; $a = 40 \text{ cm}$; **5.** $f = 15 \text{ cm}$; **6.** a) $a = 40 \text{ cm}$, b) $h = 5 \text{ cm}$, c) $u = 3$ d) Kutija je između žiže i centra krivine, lik je uvećan, stvaran i u obrnutom položaju; **7.** $h_1 = 12 \text{ cm}$; **8.** $S = 40 \text{ cm}$; **9.** $u = \frac{b}{a} = 3$; $b = 3a$; $b - a = 16$; $f = \frac{ab}{a+b} = \frac{3}{4}a$; $a = 8 \text{ cm}$; $f = 6 \text{ cm}$; $b = 24 \text{ cm}$; **10.** $b = 120 \text{ cm}$; **11.** $a = 80 \text{ cm}$; $a_1 = 40 \text{ cm}$; $b = 20 \text{ cm}$; $f = 16 \text{ cm}$; $\frac{1}{16} = \frac{1}{4} + \frac{1}{b_1}$; $b_1 = 27 \text{ cm}$; **12.** $\omega = 3 \text{ D}$; **13.** $f = \frac{ab}{a+b} = 10 \text{ cm}$; Ako se predmet približi ogledalu za Δp , onda je: $a' = a - \Delta a = 15 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$; Rastojanje na kojem se formira lik od ogledala iznosi: $b' = \frac{a' \cdot f}{a' - f} = 35 \text{ cm}$; **14.** $\frac{b}{a-d} = \frac{1}{1,5}$; $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$; $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow b = \frac{a}{3}$; Iz $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{3}{a}$ slijedi da je $a = 4f$; $b = \frac{a-d}{1,5}$. Jednačina ogledala u ovom slučaju izgleda: $\frac{1}{f} = \frac{1}{a-d} + \frac{1}{\frac{a-d}{1,5}}$. Kako je $a = 4f$, to je $f = \frac{a}{1,5} = 10 \text{ cm}$; **15.a)** Ukras za jelku predstavlja ispušteno sferno ogledalo čija je žižna duljina: $f = r/2$. Iz uslova zadatka žižna duljina je: $f = d/4 = 23,75 \text{ mm}$; $b = \frac{af}{a+f} = 23,5 \text{ mm}$; b) Linearno uvećanje: $u = \frac{b}{a} = 0,012$; $u = \frac{S}{P} \Rightarrow S = 15,6 \text{ mm}$; **16.** $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$; $u = \frac{b}{a} = \frac{S}{P}$; $b = u \cdot a = 1 \text{ m}$; $f = 1,11 \text{ m}$; $r = 2f = 2,22 \text{ m}$



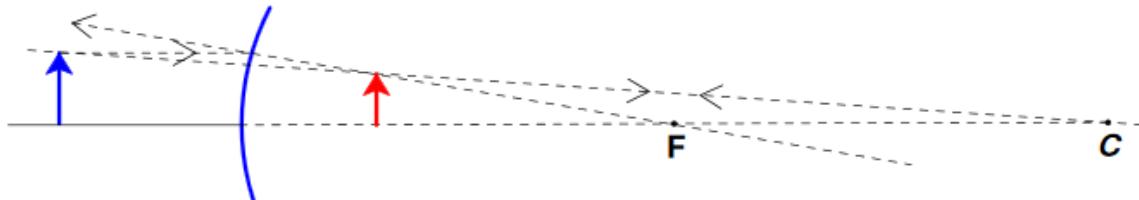
Slika uz zadatak 16.

17. $n = \frac{c}{v}$; $v = \frac{s}{t}$; $n = 1,5$;
18. Dati podaci: $f = 20 \text{ cm}$, $p = 60 \text{ cm}$ (sa p je označena udaljenost predmeta od sočiva, odnosno ogledala, a sa l udaljenost lika od sočiva, odnosno ogledala)



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \Rightarrow l = 30 \text{ cm}$$

Na mjesto sočiva stavi se sferno ogledalo.

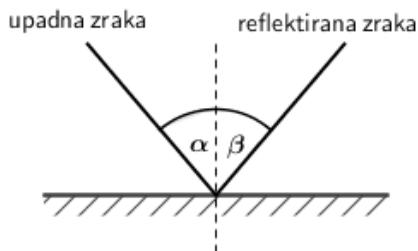


Da bi se dobila virtualna slika predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena sočivom, poluprečnik zakrivljenosti sfernog ogledala mora biti:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{2}{R}$$

$$p = 60 \text{ cm}, l = -30 \text{ cm}; R = -120 \text{ cm}$$

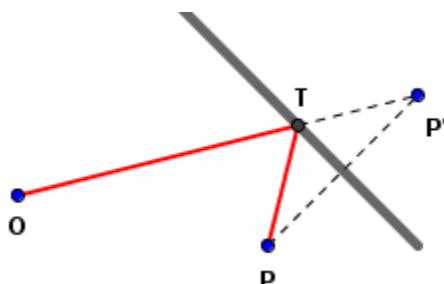
19.



$$\alpha = \beta$$

Ugao između upadne i odbijene zrake je: $\alpha + \beta = 2\alpha = 50^\circ$

20. Prvo odredimo sliku predmeta P. Iskoristimo svojstvo ravnog ogledala da su predmet i slika jednako udaljeni od ogledala. Dobivenu tačku označimo s P'.



Opažač će vidjeti sliku predmeta.

Mješoviti zadaci

Zadatke pripremili: Indira Kavazović, Ivica Stijepić, Alma Kasapović, Dženan Devedžić i Bakir Devedžić

1. Teretno vozilo ima masu 1,2 t. Krene iz mirovanja i diže se stalnom akceleracijom $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Kolika je potrebna snaga kad postigne brzinu $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$?

Rješenje:

$$v_I = 0$$

$$m = 1,2t = 1200 \text{ kg}$$

$$a = \frac{m}{s^2}$$

$$v_2 = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P = ?$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \bar{v}$$

$$P = m(g + a) \cdot \bar{v}$$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$\bar{v} = \frac{0 + 1,5}{2}$$

$$\bar{v} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

F je rezultanta dviju sila:

$$m \cdot g + m \cdot a$$

$$P = m(g + a) \cdot \bar{v}$$

$$P = 1200(1,5 + 9,81) \cdot 0,75$$

$$P = 10179 \text{ W}$$

2. Koju će visinu doseći tijelo mase 200 g bačeno u uvis kinetičkom energijom 15 J?

Rješenje:

$$E_K = 15 \text{ J}$$

$$m = 200g = 0,2kg$$

$$h = ?$$

$$E_K = \frac{mv_0^2}{2}$$

v_0 – početna brzina kojom je tijelo izbačeno

$$v_0 = \sqrt{\frac{2E_K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15}{0,2}} = 12,25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_0 = g \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{12,25}{9,81} = 1,25 \text{ s}$$

t – vrijeme potrebno da tijelo dosegne najvišu tačku

$$h = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9,81}{2 \cdot 1,25^2} = 7,66$$

3. Drvena kockica pliva na vodi tako da je 80 % zapremine u vodi. Ako kocku stavimo u tekućinu nepoznate gustoće, 90 % zapremine uronjeno je u tekućinu. Kolika je gustoća tekućine?

Rješenje:

$$V_{uronj.} = 0,8 \cdot V_{tijela}$$

$$\rho_{tek.} = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



Iz relacije $F_g = F_{uz}$ slijedi:

$$\rho_{tijela} = \rho_{tek.} \cdot \frac{V_{uronj.}}{V_{tijela}} = 10^3 \cdot 0,8 = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$V_{uronj.} = 0,9 \cdot V_{tijela}$$

$$\rho_{tek.} = ? \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



$$\rho_{tek.} = \rho_{tijela} \cdot \frac{V_{tijela}}{V_{uronj.}} = 800 \cdot \frac{1}{0,9} = 888,88 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$



4. Radnik nosi 20 opeka na visinu 6 metara. Masa jedna opeke je 3,5 kg, a masa radnika 80 kg.

Koliki je pritom obavljen rad?

Rješenje:

$$n = 20$$

$$h = 6m$$

$$m_0 = 3,5 \text{ kg} \cdot 20 = 70 \text{ kg}$$

$$m_c = 80 \text{ kg}$$

$$A = ?$$

$$A = F \cdot s = Fg \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$A = (m_0 + m_c) \cdot g \cdot h$$

$$A = (70 + 80) \cdot 9,81 \cdot 6$$

$$A = 8829 \text{ J}$$

5. Puščano zrno mase 10 g izleti brzinom $600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ako je cijev duga 60 cm, kolika je sila djelovala na zrno?

$$m = 10g = 0,01 \text{ kg}$$

$$v = 600 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$$

$$F = ?$$

$$\Delta E_k = W$$

$$\frac{mv^2}{2} = F \cdot s$$

$$F = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot s} = \frac{0,01 \cdot 600^2}{2 \cdot 0,6}$$

$$F = 3000 \text{ N} = 3 \text{ kN}$$

6. Na toranj visok 180m treba podići teret mase 150 kg. Kolika je snaga dizalice ako je za podizanje tereta potrebno 5 puta duže vrijeme nego što je vrijeme slobodnog pada sa te visine? Za gravitaciono ubrzanje uzeti $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rješenje:

$$m = 150 \text{ kg}; h = 180 \text{ m}; P = ?$$

$$\text{Snaga dizalice: } P = \frac{A}{t}$$

Rad pri podizanju tereta određen je formulom $A = G \cdot h = m \cdot g \cdot h$

Vrijeme t za podizanje dizalice je 5 puta duže od vremena t_1 slobodnog pada sa visine h:
 $t = 5 \cdot t_1$

$$h = \frac{g \cdot t^2}{2} \rightarrow t_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{h}{g}} \rightarrow t = 5 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{h}{g}}$$

$$P = \frac{m \cdot g \cdot h}{5 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{h}{g}}} = 9 \text{ kW}$$

7. Tijelo mase 5kg slobodno je padalo 6s i zaustavilo se u zemlji na dubini 2cm. Od momenta

udara u zemlju pa do zaustavljanja tijelo se kretalo jednakousporeno. Ako je gravitaciono ubrzanje $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, odrediti:

- brzinu tijela pri udaru o zemlju,
- kinetičku energiju tijela pri ulazu u zemlju,
- usporenje tijela pri kretanju kroz zemlju,
- silu otpora kretanju tijela kroz zemlju.

Rješenje:

a) Brzina tijela pri udaru u zemlju je:

$$v = g \cdot t = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = 9000 \text{ J}$

c) $V_{\text{konačno}} = 0 = v \cdot a \cdot t \rightarrow t = \frac{v}{a}$

$$d = s = v \cdot t - \frac{a \cdot t^2}{2} = v \cdot \frac{v}{a} - \frac{a \cdot (\frac{v}{a})^2}{2} = \frac{v^2}{2a} \rightarrow a = \frac{v^2}{2d} = 900 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

d) $F_0 = m \cdot a = 5 \text{ kg} \cdot 900 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4500 \text{ N}$.

8. U posudu koja ima oblik valjka s poluprečnikom baze 1 dm najprije se do visine od 60 cm ulije voda, a zatim se još 30 cm visine valjka dolije neke tečnosti. Pritisak na dno je 8760 Pa. Kolika je ukupna sila pritiska na dno i koja je to tečnost?

Rješenje:

$r = 1 \text{ dm} = 0,1 \text{ m}$

$p = p_1 + p_x ; p_1 = \rho_{\text{vode}} \cdot g \cdot h_1 = 6000 \text{ Pa}$

$h_1 = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m}$

$p_x = p - p_1 = \rho_x \cdot g \cdot h_2$

$h_2 = 30 \text{ cm} = 0,3 \text{ m}$

$\rho_x = \frac{p - p_1}{g \cdot h^2} = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ (ulje!)}$

$p = 8760 \text{ Pa}$

$\rho_{\text{vode}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$F = p \cdot S = p \cdot r^2 \cdot \pi = 275 \text{ N}$

$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$F = ?$

Izvor:

- Zbirka zadataka iz mehanike prvi razred srednjih škola, Jasenka Valašek
- Zbirka zadataka iz fizike mehanika za osnovne i srednje škole, Zinka Šalaka

9. Pri proticanju stalne električne struje, kroz poprečni presjek nekog provodnika za 3 s prođe količina elektriciteta 0,12 C. Kolika će količina elektriciteta proteći za 8 s? Kolika je jakost struje u provodniku?

Rješenje:

$q_1 = 0,12 \text{ C}, t_1 = 3 \text{ s}, t_2 = 8 \text{ s}, I = \text{const. } q_2 = ?, I = ?$

Ako kroz provodnik protiče električna struja stalne jačine, znači da kroz poprečni presjek

provodnika u jedinici vremena prođe ista količina elektriciteta, tj. $I_1 = I_2 = I$, $\frac{q_1}{t_1} = \frac{q_2}{t_2}$.

$q_2 = q_1 \cdot \frac{t_2}{t_1} = 0,12 \text{ C} \cdot \frac{8 \text{ s}}{3 \text{ s}} = 0,32 \text{ C}$

Jakost struje koja protiče kroz provodnik je: $I = \frac{q_1}{t_1} = \frac{0,12 \text{ C}}{3 \text{ s}} = 0,04 \text{ A} = 40 \text{ mA}$

10. Kroz dva provodnika protiče struja. Jakost struje u prvom provodniku je 2 A, a u drugom 5 A. Ako za neko vrijeme kroz poprečni presjek prvog provodnika prođe količina elektriciteta od 5 C, kolika će količina elektriciteta proći kroz poprečni presjek drugog provodnika za isto vrijeme?

Rješenje:

$$I_1 = 2 \text{ A}, I_2 = 5 \text{ A}, q_1 = 5 \text{ C}, t_1 = t_2, q_2 = ?$$

$$I = \frac{q}{t} \Rightarrow t = \frac{q}{I}. \text{ U našem slučaju je } t_1 = \frac{q_1}{I_1}, t_2 = \frac{q_2}{I_2}. \text{ Kako je } t_1 = t_2, \text{ onda je } \frac{q_1}{I_1} = \frac{q_2}{I_2}$$

$$q_2 = q_1 \cdot \frac{I_2}{I_1} = 5C \cdot \frac{5A}{2A} = 12,5C.$$

11. Na izvor struje elektromotorne sile 0,1 V priključena je bakarna žica poluprečnika 50 μm . Kolika je duljina žice ako kroz kolo protiče struja jakosti 0,1 A? Unutarnji otpor izvora je 0,2 Ω . Specifični otpor bakra je $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$.

Rješenje:

$$\mathcal{E} = 0,1 \text{ V}, r_0 = 50\mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m}, I = 0,1 \text{ A}, r = 0,2\Omega, \rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}, l = ?$$

$$\text{Iz Omovog zakona za cijeli strujni krug } I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \text{ može se odrediti da je}$$

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I} - r = \frac{0,1V}{0,1V} - 0,2\Omega = 0,8\Omega. \text{ Kako je } R = \rho \cdot \frac{l}{S} \text{ i } S = r_0^2 \pi, \text{ slijedi da je}$$

$$l = \frac{R \cdot S}{\rho} = \frac{R \cdot r_0^2 \cdot \pi}{\rho} = \frac{0,8\Omega \cdot 25 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot 3,14}{1,7 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}} = 0,37 \text{ m}$$

12. U strujnom krugu sa vanjskim otporom $R_1 = 9,9 \Omega$, akumulator daje struju jakosti $I_1 = 0,2$ A. Ako se umjesto otpora R_1 , stavi otpor $R_2 = 4,9 \Omega$, akumulator će dati struju $I_2 = 0,4$ A. Odrediti unutarnji otpor akumulatora i njegovu elektromotornu silu.

Rješenje:

$$R_1 = 9,9\Omega, I_1 = 0,2\text{A}, R_2 = 4,9\Omega, I_2 = 0,4\text{A}, r = ?, \mathcal{E} = ?$$

$$\text{Kada je u strujni krug uključen otpor } R_1, \text{ kroz njega teče struja } I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \text{ odakle je}$$

$$\mathcal{E} = I_1 \cdot (R_1 + r) \quad (1). \text{ Ako se akumulator poveže sa otpornikom } R_2 \text{ dobijemo } \mathcal{E} = I_2 \cdot (R_2 + r) \quad (2).$$

$$\text{Ako izjednačimo jednadžbe (1) i (2), dobijemo } I_1 \cdot (R_1 + r) = I_2 \cdot (R_2 + r), \text{ pa izvođenjem dobijemo da je unutarnji otpor } r = \frac{I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2}{I_2 - I_1} = \frac{0,2A \cdot 9,9\Omega - 0,4A \cdot 4,9\Omega}{0,4A - 0,2A} = \frac{1,98V - 1,96V}{0,2A} = 0,1\Omega$$

Ako izračunatu vrijednost unutarnjeg otpora uvrstimo u jednadžbu (1) ili (2) dobijemo elektromotornu silu

$$\mathcal{E} = I_1 \cdot (R_1 + r) = 0,2 \text{ A} (9,9 \Omega + 0,1 \Omega) = 2 \text{ V}$$

Akumulator ima unutarnji otpor $0,1 \Omega$ i elektromotornu silu 2 V .

13. Koliko elektrona u minuti odašilje akumulator koji je vezan u strujni krug sa otpornikom od 6Ω , kad je elektromotorna sila akumulatora $2,1 \text{ V}$, a njegov unutarnji otpor $r = 0,8 \Omega$?



Rješenje:

$$\mathcal{E} = 2,1 \text{ V}, R = 6\Omega, r = 0,8 \Omega, t = 1\text{min} = 60 \text{ s}, e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad n = ?$$

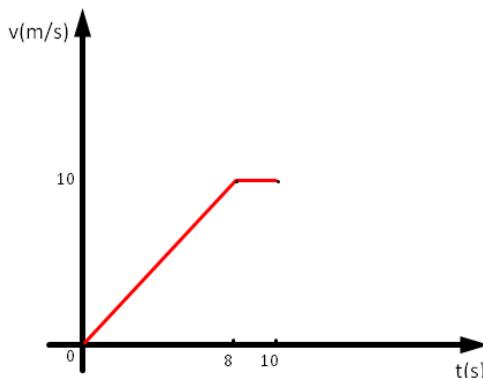
$$\text{Jakost struje u strujnom krugu je } I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}. \text{ Znamo da je } I = \frac{q}{t} = \frac{n \cdot e}{t}. \text{ Broj elektrona je}$$

$$n = \frac{I \cdot t}{e} = \frac{\mathcal{E} \cdot t}{e \cdot (R+r)} = \frac{2,1V \cdot 60s}{1,6 \cdot 10^{-19} C \cdot (6\Omega + 0,8\Omega)} = 11,6 \cdot 10^{19} = 1,16 \cdot 10^{20}.$$

Traženi broj elektrona je $1,16 \cdot 10^{20}$.

14. Svjetski rekord u trci na 100 m iznosi $9,58 \text{ s}$, a vlasnik rekorda je *Usain Bolt*, čija je masa 94 kg .

- 1) Neka se u ovom, prvom dijelu zadatka, Bolt kreće konstantnom brzinom cijelo vrijeme kretanja.
 - a) Izračunati njegovu brzinu.
 - b) Izracunati promjenu kinetičke energije Bolta u posljednjih 2.58 sekundi kretanja.
- 2) U stvarnosti, on ne trči cijelu dionicu istom brzinom, nego mijenja svoju brzinu prema komplikovanim jednačinama. Mi ćemo prepostaviti da se njegova brzina mijenja kao što je prikazano na grafiku ispod (odstupa od realnosti).



Posmatrajući grafik, odgovoriti na sljedeća pitanja:

- a) Izračunati ubrzanje Bolta u vremenskom intervalu $(0,8)$ sekundi kretanja. Koliko je ubrzanje u ostatku trke?
- b) Kolika je promjena kinetičke energije Bolta u prvih 8 sekundi kretanja.
- c) Koliko koraka napravi Bolt u zadnje dvije sekunde kretanja, ako je dužina koraka 2 metra?

Rješenje:

Prvi dio:

$$a) v = s/t \rightarrow v = 10.44 \text{ m/s}$$

b) Kako je brzina konstantna, promjena kinetičke energije je nula.

$$v = \text{const.} \rightarrow \Delta E = 0 \text{ J}$$

Drugi dio:

$$a) a = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \Delta v = 10 \frac{m}{s} - 0 \frac{m}{s}; \Delta t = 8s - 0s$$

$$a = \frac{10 \frac{m}{s}}{8s} \rightarrow a = 1.25 \frac{m}{s^2}$$

gdje smo vrijednosti brzine i vremena čitali sa datog grafika.

U ostatku trke , brzina je konstantna , pa je ubrzanje nula. $\Delta v = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\begin{aligned} b) \Delta E &= E_2 - E_1 \\ \Delta E &= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}; v_1 = 0; v_2 = 10 \frac{m}{s} \\ \Delta E &= \frac{mv_2^2}{2} \\ \Delta E &= 4700 J \\ c) n &= \frac{\Delta s}{l} \\ n &= \frac{v\Delta t}{l}; v = 10 \frac{m}{s}; \Delta t = 2s \\ n &= \frac{20m}{2m} \\ n &= 10 \end{aligned}$$

15. Duga daska , čiju masu ćemo zanemariti, postavljena je na oslonac, a na dasku su postavljena dva tijela masa 0.3 kg i 0.8 kg koja su uravnovežena. Prvo tijelo je od oslonca udaljeno za 10 metara . Kolika je međusobna udaljenost među tijelima? Tijela se počnu kretati prema osloncu, prvo tijelo jednolikom pravolinijskom (prepostavimo da momentalo počinje jednolikom kretanjem) brzinom od $1 \frac{m}{s}$, dok drugo tijelo ubrzava iz mirovanja ubrzanjem $8 \frac{m}{s^2}$. U nekom trenutku tijela će ponovo bit uravnovežena. Izračunajte vrijeme koje protekne od početka kretanja tijela do tog trenutka.



Rješenje:

Prvi dio:

Uslov ravnoteže poluge je da je zbir momenata sile na polugu nula. U ovom slučaju imamo dva momenta sile čiji su smjerovi različiti i zbir im je nula, pa su oni jednaki. Neka su udaljenosti tijela od oslonca d_1 i d_2 .

$$m_1 g d_1 = m_2 g d_2 \Rightarrow d_2 = \frac{m_1 d_1}{m_2} \Rightarrow d_2 = 3.75 \text{ m}$$

Udaljenost između tijela je $d = d_1 + d_2 \Rightarrow d = 13.75 \text{ m}$.

Drugi dio:

Neka tijela pređu puteve s_1 i s_2 , redom. Ponovo , kao u prvom dijelu zadatka uspostavljamo ravnotežu, ali sada imamo nove udaljenosti tijela od oslonca i te udaljenosti su $d_1 - s_1$ za prvo tijelo, i $d_2 - s_2$ za drugo. Sada imamo :

$$\begin{aligned} m_1 g (d_1 - s_1) &= m_2 g (d_2 - s_2) \\ m_1 d_1 - m_1 s_1 &= m_2 d_2 - m_2 s_2 \end{aligned}$$



Kako iz prvog dijela imamo da je $m_1 d_1 = m_2 d_2$, u relaciji iznad te članove možemo poništiti, pa nam ostane :

$$-m_1 s_1 = -m_2 s_2$$

Nakon množenja sa -1 :

$$m_1 s_1 = m_2 s_2$$

Put prvog tijela, koji se kreće jednolikoj je : $s_1 = vt$, a drugog : $s_2 = \frac{at^2}{2}$. Uvrštavajući ove izraze u relaciju iznad, dobivamo :

$$\begin{aligned} m_1 v t &= m_2 \frac{at^2}{2} \\ m_1 v &= m_2 \frac{at}{2} \\ t &= \frac{2m_1 v}{m_2 a} \\ t &= 0.09 \text{ s} \end{aligned}$$



16. Da bi avion mogao letjeti potrebno je da ima veliku brzinu, time se stvara sila potiska koja podiže avion. Sila potiska se stvara na krilima aviona. Avion leti na nekoj visini, tako da je pritisak iznad krila aviona 9 kPa , a ispod krila aviona 5 kPa . Ukupna površina oba krila aviona je 360 m^2 . Odrediti masu aviona. Gravitaciono ubrzanje je $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Rješenje:

Sila potiska se stvara zbog razlike pritisaka iznad i ispod krila aviona, pa je : $F_{potiska} = \Delta p S = (p_{iznad} - p_{ispod})S$.

Kako se avion održava na nekoj visini, po vertikali se ne kreće, pa je zbir svih sila u vertikalnom pravcu nula.

U tom pravcu na avion djeluje sila potiska i graviaciona sila, te sile imaju suprotan smjer pa je :

$$\begin{aligned} F_{potiska} &= G \\ (p_{iznad} - p_{ispod})S &= mg \\ m &= \frac{(p_{iznad} - p_{ispod})S}{g} \\ m &= 146\,788.99 \text{ kg} \\ m &\approx 146.79 \text{ t} \end{aligned}$$

17. Preko raskvašenog zemljišta prešao je bager vršeći pritisak od $p=50 \text{ kPa}$. Može li preko tog zemljišta da priđe tenk mase $m=30 \text{ t}$, ako dodirna površina svake njegove gusjenice iznosi $S=4 \text{ m}^2$

Rješenje:

$$p=50 \text{ kPa}$$

$$m=30 \text{ t}$$

$$S=4 \text{ m}^2$$

$$p = 50 \text{ kPa} = 50\,000 \text{ Pa}$$

$$mg = G$$

$$G = 30009,81N$$

$$p_2 = \frac{G}{S}$$

$$p_2 = 7502,45 \text{ Pa}$$

Tenk djeluje ukupnom silom od $2p_2$. Što znači da može prijeći.

Dodaci

OSNOVNE MJERNE JEDINICE MEĐUNARODNOG SISTEMA (SI)

Redni broj	Naziv fizičke veličine	Oznaka	Naziv jedinice	Oznaka
1	Dužina	l, a, b, c	metar	m
2	masa	m	kilogram	kg
3	vrijeme	t	sekunda	s
4	termodinamička temperatura	T	kelvin	K
5	jačina električne struje	I	amper	A
6	jačina svjetlosti	I_v	kandela	cd
7	količina tvari (množina)	n	mol	mol

Definicije osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI):

Metar je dužina puta kojeg svjetlost pređe u vakuumu za vrijeme jednog $299\ 792\ 458$ – og dijela sekunde.

Kilogram je masa međunarodne pramjere kilograma.

Sekunda je trajanje $9\ 192\ 631\ 770$ perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dvaju hiperfinih nivoa osnovnog stanja atoma cezija 133.

Kelvin je termodinamička temperatura koja je jednaka $\frac{1}{273,16}$ termodinamičke temperature trojne tačke vode.

Amper je jačina stalne električne struje koja, kad se održava u dva ravna, beskonačno duga, paralelna provodnika, zanemarljivo malog kružnog poprečnog presjeka koji se nalaze u vakuumu na međusobnom rastojanju jedan metar, proizvodi među tim provodnicima silu od $2 \cdot 10^{-7}$ njutna (N) po metru njihove dužine.

Kandela je svjetlosna jačina u određenom smjeru izvora koji odašilje monohromatsko zračenje frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ herca (Hz) i kojem je energetska jačina u tom smjeru $\frac{1}{683}$ watta po steradijanu $\left(\frac{W}{sr}\right)$.

Mol je količina tvari sistema koji sadrži toliko elemntarnih jedinki koliko ima atoma u $0,012$ kilograma ugljika 12.



DOPUNSKE MJERNE JEDINICE MEĐUNARODNOG SISTEMA (SI)

Redni broj	Naziv fizičke veličine	Oznaka	Naziv jedinice	Oznaka
1	ravninski ugao	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$	radijan	rad
2	prostorni ugao	Ω	steradijan	sr

NEKE IZVEDENE MJERNE JEDINICE MEĐUNARODNOG SISTEMA (SI)

Redni broj	Naziv fizičke veličine	Oznaka	Naziv jedinice	Oznaka
1	površina	S,A	kvadratni metar	m^2
2	zapremina	V	kubni metar	m^3
3	gustina	ρ	kilogram po kubnom metru	$\frac{kg}{m^3}$
4	brzina	v	metar u sekundi	$\frac{m}{s}$
5	ubrzanje	a	metar u sekundi na kvadrat	$\frac{m}{s^2}$
6	količina kretanja	p	kilogram metar u sekundi	$kg\frac{m}{s}$
7	moment količine kretanja	L	kilogram metar na kvadrat u sekundi	$kg\frac{m^2}{s}$
8	Moment inercije	I	kilogram metar na kvadrat	kgm^2
9	Kinematička viskoznost	v	metar na kvadrat u sekundi	$\frac{m^2}{s}$
10	Maseni protok	q_m	kilogram u sekundi	$\frac{kg}{s}$
11	Zapreminska protok	q_V	kubni metar u sekundi	$\frac{m^3}{s}$
12	Jačina magnetnog polja	H	amper po metru	$\frac{A}{m}$
13	Molarna masa	M	kilogram po molu	$\frac{kg}{mol}$

Međunarodni prefiksi za tvorbu decimalnih jedinica

Prefiks	Oznaka	Vrijednost	Brojčani faktor
EKSA	E	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
PETA	P	1 000 000 000 000 000 000	10^{15}
TERA	T	1 000 000 000 000	10^{12}
GIGA	G	1 000 000 000	10^9
MEGA	M	1 000 000	10^6
KILO	K	1 000	10^3
HEKTO	H	100	10^2
DEKA	da	10	10
DECI	d	0,1	10^{-1}
CENTI	c	0,01	10^{-2}
MILI	m	0,001	10^{-3}
MIKRO	μ	0,000 001	10^{-6}
NANO	n	0,000 000 001	10^{-9}
PIKO	p	0,000 000 000 001	10^{-12}
FEMTO	f	0,000 000 000 000 001	10^{-15}
ATO	a	0,000 000 000 000 000 001	10^{-18}

Naziv nekih decimalnih brojeva većih od milion

Naziv	Vrijednost	Brojčani faktor
TRILION	1 000 000 000 000 000 000	10^{18}
BILIJARDA	1 000 000 000 000 000	10^{15}
BILION	1 000 000 000 000	10^{12}
MILIJARDA	1 000 000 000	10^9
MILION	1 000 000	10^6

Za izradu ovog materijala korišten je izvor:

FIZIKALNE VELIČINE I MJERNE JEDINICE
MEĐUNARODNOG SUSTAVA (SI)
Avtor: Dipl. ing. KUZMAN RAŽNJEVIĆ
Nakladni zavod ZNANJE, ZAGREB
Zagreb 1985.

NEKE FIZIKALNE KONSTANTE

Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Fizikalne_konstante

Naziv konstante	Znak	Vrijednost konstante
brzina svjetlosti u vakuumu	c_0 ili c	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
dielektričnost vakuuma	ε_0	$8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
permeabilnost vakuuma	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$
Coulombova konstanta	κ	$9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$
Opća (Newtonova) gravitacijska konstanta	γ	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
masa protona	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$
masa neutrona	m_n	$1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $939,57 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$
masa elektrona	m_e	$9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $0,511 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$
masa alfa-čestice	m_α	$6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
elementarni naboj	Q_e ili e	$1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
unificirana jedinica atomske mase	u	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
standardni atmosferski tlak	p_0	101325 Pa
standardna temperatura	T_0	$273,15 \text{ K}$
apsolutna nula	θ_0	$-273,15 \text{ }^\circ\text{C}$
brzina zvuka u zraku pri $20 \text{ }^\circ\text{C}$	v	$340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
ubrzanje Zemljine sile teže	g_n	$9,80665 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Poluprečnik Zemlje	r_Z	$6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$
masa Zemlje	m_Z	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$



TABELE GUSTINA NEKIH SUPSTANCI

1. Gustine čvrstih tijela

supstanca (tvar)	gustina(kg/m ³)	gustina (g/cm ³)
pluto	300	0,3
drvo	650	0,65
parafin	900	0,9
led	900	0,9
volfram	1900	1,9
kuhinjska so	2400	2,4
staklo	2500	2,5
kvarc	2600	2,6
aluminij	2700	2,7
mermer	2800	2,8
cink	7100	7,1
željezo	7800	7,8
dijamant	8600	8,6
nikl	8900	8,9
bakar	8900	8,9
srebro	10500	10,5
olovo	11300	11,3
zlato	19300	19,3
osmij	22500	22,5

2. Gustine tečnosti

supstanca (tvar)	gustina (kg/m ³)	gustina(g/cm ³)
benzin	700	0,7
nafta	750	0,75
ulje	760	0,76
aceton	790	0,79
alkohol	790	0,79
voda	1000	1
morska voda	1030	1,03
glicerin	1270	1,27
živa	13600	13,6

3. Gustine gasova

supstanca (tvar)	gustina(kg/m ³)	gustina(g/cm ³)
vodik	0,09	0,00009
helij	0,18	0,00018
amonijak	0,77	0,00077
vodena	0,8	0,0008
para		
azot	1,25	0,00125
vazduh	1,29	0,00129
kisik	1,43	0,00143
benzol	3,48	0,00348
živina	9,02	0,00902
para		


Tabela specifičnih otpora i temperaturnih koeficijenata pri 20°C

 Izvor: https://hr.wikipedia.org/wiki/Električni_otpornik

Materijal	Specifični otpor ρ ($\Omega \text{mm}^2/\text{m}$)	Temperaturni koeficijent α (1/K)
<u>Aluminij</u> - lijevan - mekan - tvrdo vučen	0,04 0,028 0,029	0,0036 0,00403 0,0041
<u>Bakar</u> - mekan - tvrdo vučen	0,0175 0,0178	0,00392 0,00392
<u>Bronza</u> - aluminijeva - kositrena	0,13 - 0,29 0,0278	0,0006 - 0,001
Cekas	1,12	0,00014
Cekas I	0,97	0,00052
Cekas II	1,08	0,00008
<u>Cink</u>	0,06	0,004
<u>Čelik</u> - lim - dinamo-lim - žica - lijev	0,1 - 0,25 0,13 0,27 - 0,67 0,17 0,142	0,0045 - 0,0055 0,0045 - 0,0052 -
Kantal	0,5	0,00003
<u>Kositar</u>	0,12	0,0045
<u>Magnezij</u>	0,043	0,0041
Manganin	0,43	0,0041
<u>Mesing (Mjed)</u> - lijevani - vučeni	0,071 0,07 - 0,08	- 0,0013 - 0,0019
Nikelin	0,42	0,00023
<u>Nikal</u>	0,069	0,006
<u>Olovo</u>	0,06	0,0039
<u>Platina</u>	0,11	0,0031
Silimun, lijevani	0,059	0,004
<u>Srebro</u>	0,0165	0,0038
<u>Volfram</u>	0,055	0,0048
<u>Zlato</u>	0,023	0,004
<u>Željezo, elekrolitsko</u>	0,12	0,0065
<u>Živa</u>	0,958	0,00099

Korištena literatura i web stranice

„Zbirka pitanja, zadataka i ogleda iz fizike s rješenjima, 8. razred osnovne škole“, autori: Esad Kulenović, Safet Kaljanac

„Zbirka rešenih zadataka iz fizike sa takmičenja osnovnih škola“ u okviru Društva fizičara Srbije, Beograd 1994.g.

„Zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole , Fizika 7“, autori Esad Kulenović i Safet Kaljanac.

„Fizika – zbirka zadataka za 1. do 4. razred gimnazije“, autori: Branka Mikuličić, Milena Varićak, Elza Vernić, izdavač: „Školska knjiga“ Zagreb, 1994. god.

„Zbirka zadataka iz fizike, osnovni kurs B sa rešenim zadacima sa takmičenja učenika OŠ iz fizike“, autori: G. Dimić, B. Bošković i V. Tomić, izdavač: Naša knjiga“ Beograd, 1999. god.

„Zbirka odabranih zadataka, laboratorijskih vježbi i ogleda iz fizike za 7. razred“, autori Bego Mehurić i Kasim Imamović, izdavač: „Harfo – graf“ d. o. o. Tuzla, 2006.

„Zbirka odabranih zadataka, laboratorijskih vježbi i ogleda iz fizike za 8. razred“, autori Bego Mehurić i Kasim Imamović, izdavač: „Harfo – graf“ d. o. o. Tuzla, 2006.

„Odabrani zadaci iz fizike za osnovnu školu“, autori: dr. Ahmed Čolić i dr. Hasnija Muratović, izdavač: Behram – begova medresa, Tuzla, 1997. god.

„Odabrani zadaci iz fizike za 1. razred gimnazije“, dr. Ahmed Čolić, izdavač: Behram – begova medresa Tuzla, 1999. god.

„Odabrani zadaci iz fizike za 2. razred gimnazije“, dr. Ahmed Čolić, izdavač: Behram – begova medresa Tuzla, 2000. god.

„Fizika – predmetni ispitni katalog za polaganje eksterne mature u općim gimnazijama Tuzlanskog kantona“, autori: Smajo Sulejmanović, Suad Kunosić i Denis Sulfendić, izdavač: „IN SCAN“ d. o. o. Tuzla, 2015. god.

Fizika – udžbenik za sedmi razred devetogodišnje osnovne škole“, autori: Edin Kušmić i Mirsudin Pačariz, izdavač: „Klett“ d. o. o. Sarajevo, 2010. god.

<http://www.halapa.com/fizos.htm>

http://takmicenja.dfs.rs/?page_id=124